大庆实验中学实验一部 2020 级高三得分训练四

数学参考答案：

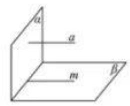
1．D

【详解】由不等式 $\log_2(x+2)\le 1\Rightarrow 0<x+2\le 2$,解得 $A=\{x|-2<x\le 0\}$,$\therefore \complement_U A=\{x|x\le -2$ 或 $x>0\}$;由不等式 $\frac{1}{x}<1\Rightarrow \frac{1-x}{x}<0$,解得 $B=\{x|x<0$ 或 $x>1\}$,$\therefore(\complement_U A)\cup B=\{x|x\ne 0\}$.故选:D.

2．C

【详解】解：由 $(1+i)^2 z=2-4i$ 得 $z=\frac{2-4i}{(1+i)^2}=\frac{2-4i}{2i}=\frac{1-2i}{i}=\frac{(1-2i)i}{i\cdot i}=\frac{2+i}{-1}=-2-i$ ，故选：C

3．B



【详解】对于 A，若 $a//b,b//\alpha$ ，则 $a//\alpha$ 或 $a\subset\alpha$ ，故 A 错误；对于 B，若 $a//b,b//\beta$ ，则 $a\subset\beta$ 或 $a//\beta$ ，若 $a\subset\beta$ ，因为 $a\perp\alpha$ ，则 $\alpha\perp\beta$ ，若 $a//\beta$ ，如图所示，则在平面 β 一定存在一条直线 $m//a$ ，因为 $a\perp\alpha$ ，所以 $m\perp\alpha$ ，又 $m\subset\beta$ ，所以 $\alpha\perp\beta$ ，综上若 $a//b,a\perp\alpha,b//\beta$ ，则 $\alpha\perp\beta$ ．故 B 正确；对于 C，若 $a//\alpha,b//\beta,\alpha//\beta$ ，则直线 a,b 相交或平行或异面，故 C 错误；对于 D．若 $a//\alpha,b//\beta,\alpha\perp\beta$ ，则直线 a,b 相交或平行或异面，故 D 错误.故选：B.

4．C

【详解】设每个面记为 $n_i\left(i\in[1,F]\right)$ 边形，则所有的面角和为 $\sum_{i=1}^{F}(n_i-2)\pi=\pi\sum_{i=1}^{F}n_i-2\pi F=\pi\cdot 2E-2\pi F=2\pi(E-F)$ ，

根据定义可得该类多面体的总曲率 $2\pi V-2\pi(E-F)=4\pi$ 为常数.故选：C.

5．A

【详解】设 5 人分到的面包数量从小到大记为 $\{a_n\}$ ，设公差为 d ，依题意可得，$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=100$ ，

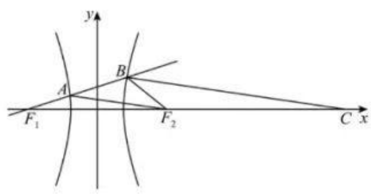
$\therefore a_3=20,a_3+a_4+a_5=7(a_1+a_2)$ ，$\therefore 60+3d=7(40-3d)$ ，解得 $d=\frac{55}{6}$ ，$\therefore a_5=a_3+2d=20+\frac{55}{3}=\frac{115}{3}$.故选：A.

6．B

【详解】解:因为 $|\vec{a}+2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}|\vec{a}|$ ，所以 $|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7|\vec{a}|^2$ ，所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|,\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$ ，

因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=|\vec{a}|^2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$ ，所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{2}$ ，由于 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0^\circ,180^\circ]$ 所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=60^\circ$ 故选：B

7．A



【详解】因为 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{F_2A}$ ，所以 $\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$ ，设 $|F_1F_2|=2c$ ，则 $|F_2C|=4c$ ，

设 $|AF_1|=t$ ，则 $|BF_1|=3t$ ，$|AB|=2t$ ．因为 BF_2 平分 $\angle F_1BC$ ，由角平分线定理可知，$\frac{|BF_1|}{|BC|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_2C|}=\frac{2c}{4c}=\frac{1}{2}$ ，所以 $|BC|=2|BF_1|=6t$ ，所以 $|AF_2|=\frac{1}{3}|BC|=2t$ ，

由双曲线定义知 $|AF_2|-|AF_1|=2a$ ，即 $2t-t=2a$ ，$t=2a$ ，①，又由 $|BF_1|-|BF_2|=2a$ 得 $|BF_2|=3t-2a=2t$ ，所以

$|BF_2|=|AB|=|AF_2|=2t$ ，即 $\triangle ABF_2$ 是等边三角形，所以 $\angle F_2BC=\angle ABF_2=60^\circ$ ．在 $\triangle F_1BF_2$ 中，由余弦定理知

$\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\cdot|BF_1|\cdot|BF_2|}$，即 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{4t^2+9t^2-4c^2}{2\cdot 2t\cdot 3t}$，化简得 $7t^2=4c^2$，把①代入上式得 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{7}$，所以离心率为 $\sqrt{7}$．故选：A.

8．D

【详解】解:由题知构造 $f(x)=\ln(1+x)-\left(\sqrt{1+2x}-1\right),(x\geq 0)$,所以 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}=\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{\sqrt{1+2x}(1+x)}\leq 0$,

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减,所以 $f(0.1)<f(0)=0$,即 $\ln(1.1)<\sqrt{1.2}-1$,即 $a<c$ 因为

$\ln 1.1=\ln\dfrac{11}{10}=-\ln\dfrac{10}{11}=-\ln\dfrac{11-1}{11}=-\ln\left(1-\dfrac{1}{11}\right)$,构造 $g(x)=\ln(1+x)-x$,$x\in(-1,0]$,所以 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}\geq 0$,

即 $g(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增,所以 $g\left(-\dfrac{1}{11}\right)<g(0)=0$,即 $\ln\left(1-\dfrac{1}{11}\right)+\dfrac{1}{11}<0$,即 $\dfrac{1}{11}<-\ln\left(1-\dfrac{1}{11}\right)$,即 $b<a$,综上:$b<a<c$.故选:D

9．ABC

【详解】对于 A，设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,7)$，若 $P(\xi<2)=P(\xi>4)$，则正态分布曲线关于直线 $x=3$ 对称，则 $\mu=3$，故选项 A 正确;；对于 B，回归方程的直线斜率为负数，所以变量 x 与 y 呈负的线性相关关系，所以 B 正确；对于 C，该生在上学路上到第3个路口首次遇到红灯，则该生在前2个路口不是红灯，第3个路口是红灯，由独立事件的概率乘法可知，所求概率为 $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$，所以 C 正确；对于 D，由 $\begin{cases}P(X=k)\geq P(X=k+1)\\P(X=k)\geq P(X=k-1)\end{cases}$，即

$\begin{cases}C_7^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\geq C_7^{k+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\\C_7^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\geq C_7^{k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\end{cases}$，解得 $k=3$ 或 $k=4$，所以 D 错误．故选：BC.

10．ACD

【详解】对于 A，因为 $xy>0,2x+y=xy$，所以 $x>0,y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1$，则

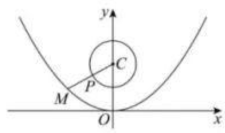
$2x+y=(2x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=4+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geqslant 4+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{4x}{y}}=8$，当且仅当 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y}$，即 $y=2x=4$ 时取等号，所以 $2x+y$ 的最小值为 8，故 A 正确；对于 B，若 $x<-3$，则 $x+3<0$，则 $-x-3>0$，则

$y=x+\dfrac{1}{x+3}=-\left[(-x-3)+\dfrac{1}{(-x-3)}\right]-3\leq -2\sqrt{(-x-3)\cdot\dfrac{1}{(-x-3)}}-3=-5$，当且仅当 $(-x-3)=\dfrac{1}{(-x-3)}$，即 $x=-4$ 时取等号，所以函数 $y=x+\dfrac{1}{x+3}$ 的最大值为 -5，故 B 错误.对于 C，因为正数 a，b 满足 $ab=a+b$，所以 $(a-1)(b-1)=1$，且 $a>1$，$b>1$，所以 $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{(a-1)(b-1)}}=2$，故 C 正确，对于 D，$\because a>0$，$b>0$，且 $a^2+b=1$，

$\therefore 1=a^2+b\geq 2a\sqrt{b}$，$\therefore 2\left(a^2+b\right)\geq\left(a+\sqrt{b}\right)^2$，$\therefore \left(a+\sqrt{b}\right)^2\leq 2$，当且仅当 $a=\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 取等号，故 D 正确；故选：ACD.

11．AD

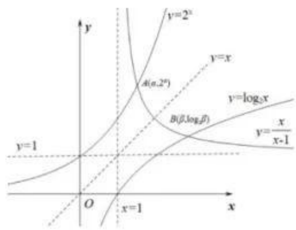
【详解】对 A，$x^2=8y$，则 $p=4$，焦点坐标为 $(0,2)$，准线方程为 $y=-2$，$\therefore |MF|=y_1+2$，$\because y_1\geq 0$，$\therefore |MF|\geq 2$，



当且仅当 $y_1=0$ 时等号成立，故A正确；对B，$\because |MF|+|NF|=12$，根据抛物线定义得 $y_1+2+y_2+2=12$，则 $y_1+y_2=8$，而由中点坐标公式得点 P 的纵坐标 $y_p=\frac{y_1+y_2}{2}=4$，即为点 P 到 x 轴的距离为4，故B错误；对C，因为直线 MN 过点 F，所以 $x_1x_2=-16$，故C错误；对D，若 $\overrightarrow{MF}=\lambda\overrightarrow{NF}$，则 M,F,N 三点共线，则 $|MN|$ 的最小值即为抛物线的通径长，令 $y=2$，则 $x=\pm4$，故通径长为8，故D正确；故选：AD.

12．．ABC

【详解】由函数 $y=\frac{x}{x-1}$ 得 $x=\frac{y}{y-1}$，所以 $y=\frac{x}{x-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，α,β 是函数 $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 的图象与函数 $y=\frac{x}{x-1}$ 的图象的交点的横坐标，因此已知 $\alpha=\log_2\beta$，$\beta=2^\alpha$，又 $\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}+1$，$(\alpha-1)(\beta-1)=1$，即 $\alpha+\beta=\alpha\beta$，$\alpha+2^\alpha=\beta+\log_2\beta$，因而A、B均正确；又 $\alpha+\beta=\alpha+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\alpha-1+\frac{1}{\alpha-1}+2\geqslant4$，当且仅当 $\alpha-1=\frac{1}{\alpha-1}$ 即 $\alpha=2$ 时等号成立，但 $f(2)=\frac{2}{2-1}-2^2=-2\neq0$，因而 $\alpha\neq2$，上式等号不成立，所以 $\alpha+\beta>4$，C正确；记 $f\left(\frac{3}{2}\right)=3-2^{\frac{3}{2}}=3-\sqrt{8}>0$，$f(2)=2-2^2<0$，因此 $\frac{3}{2}<\alpha<2$ 而函数 $h(\alpha)=\alpha-\beta=\alpha-\frac{\alpha}{\alpha-1}=\alpha-1-\frac{1}{\alpha-1}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 范围内单调递增，所以 $h(\alpha)>h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}-2>-2$，所以D错误．故选：ABC.



13．$(x-2)^2+y^2=1$ （满足条件的方程还有：$x^2+(y-2)^2=1$，$\left(x-2\sqrt{2}+2\right)^2+\left(y-2\sqrt{2}+2\right)^2=\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$，$\left(x+2\sqrt{2}+2\right)^2+\left(y+2\sqrt{2}+2\right)^2=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$）．

【详解】设圆的方程为：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，和直线相切可以得：$R=|a-1|=|b-1|$，和圆相切得：$\sqrt{a^2+b^2}=R+1$ 或 $\sqrt{a^2+b^2}=|R-1|$，若 $a=2$，则 $b=0$，$R=1$，此时圆的方程：$(x-2)^2+y^2=1$，故答案为：$(x-2)^2+y^2=1$ （答案不唯一，只需满足与直线 $x=1$，$y=1$，和圆 $x^2+y^2=1$ 都相切即可）．

14．$\frac{5}{12}$

【详解】记事件 M 为"甲派往A小区"，事件 N 为"乙派往 B 小区"，则若A小区分配甲一个人，则有 $C_3^1C_2^1=6$，若A小区分配甲以及另一个人一起，则有 $C_3^1A_2^2=6$，故事件 M 包含的基本事件个数为 $C_3^1C_2^1+C_3^1A_2^2=12$，在甲派往A小区的条件下，乙派往 B 小区的情况为：①只有甲派往A小区，只有乙派往 B 小区，另外两个人去 C 小区，则有1种情况，②从丙丁中选一个人连同甲一起派往A小区，只有乙派往 B 小区，剩下一个人去C小区，则有 C_2^1 种情况，③从丙丁中选一个人连同乙一起派往 B 小区，只有甲派往A小区，剩下一个人去C小区，则有 C_2^1 种情况，

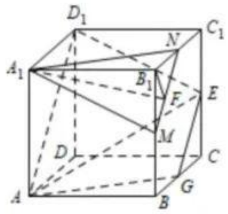
$P(N|M)=\frac{1+C_2^1+C_2^1}{12}=\frac{5}{12}$，故答案为：$\frac{5}{12}$

15．-4

【详解】

$\frac{1}{\cos20^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sin20^\circ}=\frac{\sin20^\circ-\sqrt{3}\cos20^\circ}{\sin20^\circ\cos20^\circ}=\frac{2(\frac{1}{2}\sin20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos20^\circ)}{\frac{1}{2}\sin40^\circ}=\frac{4\sin(20^\circ-60^\circ)}{\sin40^\circ}=\frac{4\sin(-40^\circ)}{\sin40^\circ}=\frac{-4\sin40^\circ}{\sin40^\circ}=-4$．故答案为：$-4$

16．20π



【详解】由已知，如图所示，连接 A_1M，因为 M，E 分别是棱 BB_1 和 CC_1 的中点，所以 $A_1D_1//ME$ 且 $A_1D_1=ME$，所以四边形 A_1MED_1 为平行四边形，所以 $A_1M//D_1E$，$D_1E\subset$ 平面 D_1AE，$A_1M\not\subset$ 平面 D_1AE，所以 $A_1M//$ 平面 D_1AE，取 B_1C_1 的中点 N，连接 MN，取 BC 的中点 G，连接 AG、EG，$EG//BC_1$，$AD_1//BC_1$ 因为 M，N 分别是棱 BB_1 和 B_1C_1 的中点，所以 $MN//EG$，$EG\subset$ 平面 D_1AE，$MN\not\subset$ 平面 D_1AE，所以 $MN//$ 平面 D_1AE，而 A_1M、$MN\subset$ 平面 A_1MN，$A_1M\cap MN=M$，所以平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，而 F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 $A_1F//$ 平面 D_1AE，所以 F 是棱 MN 内的动点，因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，$B_1F\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $A_1B_1\perp B_1F$，在 $\triangle A_1B_1F$ 中，$\angle A_1B_1F=\frac{\pi}{2}$，所以 $\triangle A_1B_1F$ 外接圆半径为斜边 A_1F 的一半，要使外接圆面积最小，即外接圆半径最小，即 A_1F 取得最小值，又 $A_1M=A_1N$，所以 F 为 MN 中点时取得最小值，由 $A_1B_1=4$，$BC_1=4\sqrt{2}$，$B_1M=B_1N$，F 为 MN 中点，所以 $MN\perp B_1F$，设 $\triangle MB_1F$ 的外接圆半径为 r，$r=\frac{1}{2}B_1M=1$，三棱锥 A_1-B_1MF 的外接球半径为 R，所以 $R^2=r^2+(\frac{A_1B_1}{2})^2=1+4=5$，所以三棱锥 A_1-B_1MF 的外接球表面积为 $S=4\pi R^2=20\pi$.故答案为：20π.

17．(1)$\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$；(2)$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

17.解析（1）在$\triangle ACD$中，$\because\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，则 $\sin\angle ACD=\frac{AD\sin\angle ADC}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle ACD=\frac{\pi}{4}$，

$\sin\angle CAD=\sin\left(\angle ADC+\angle ACD\right)=\sin\angle ADC\cos\angle ACD+\cos\angle ADC\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，……2 分

$\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\times AD\times\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ……3 分

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}$，即 $BC=AC\tan\angle BAC$，

$\tan\angle BAC=\tan\left(\angle ADC+\angle ACD\right)=\frac{\tan\angle ADC+\tan\angle ACD}{1-\tan\angle ADC\tan\angle ACD}=2+\sqrt{3}$，

$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}AC^2\times\tan\angle BAC=2+\sqrt{3}$，……4 分

$\triangle DBC$ 的面积 $S_{\triangle DBC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$……5 分

（2）在$\triangle ACD$中，设$\angle ACD=\theta$，$\because\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，则 $AC=\frac{AD\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\frac{1}{\sin\theta}$……6 分

△ACD 的面积 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\times AD\times\sin\angle CAD=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\tan\theta}$ ……7 分

若 $AC<AD$，则 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，$\tan\theta\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，$\frac{1}{\tan\theta}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$ 则 $S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\tan\theta}\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，即△ACD 面积的

取值范围 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$ ……10 分

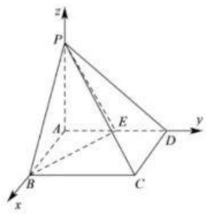
18．(1)证明见解析；(2)1

【详解】(1) $\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BC$，……2 分

又 $\because BC\perp AB$，$PA,AB\subset$ 平面 PAB，$PA\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，……4 分

又 $\because BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAB .……5 分

(2) $\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB,AD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AB,PA\perp AD$，因为 $AB\perp AD$，故



以 $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\right\}$ 为正交基底，建立空间直角坐标系，设 $AE=a$，则

$E(0,a,0),P(0,0,1),B(1,0,0),\overrightarrow{EB}=(1,-a,0),\overrightarrow{EP}=(0,-a,1)$，设平面 PBE 的法向量为

$\vec{n}=(x,y,z)$，由于 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=(1,-a,0)\cdot(x,y,z)=x-ay=0\\ \overrightarrow{EP}\cdot\vec{n}=(0,-a,1)\cdot(x,y,z)=-ay+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，得：$x=a,z=a$，故取 $\vec{n}=(a,1,a)$，……8 分

取平面 ABE 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，……9 分

则 $\cos60^\circ=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{2}$，解得：$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……10 分

故 $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,\sqrt{2},0)$，故点 C 到平面 PBE 的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0,\sqrt{2},0)\right|}{\sqrt{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}}}=1$.……12 分

19．(1) $\frac{1}{9}$；(2)分布列见解析，数学期望 $E(Y)=2.4$

【详解】(1) 由题意得：$P(A)=\frac{81+9}{100}=\frac{9}{10}$，$P(B)=\frac{9}{100}$，$P(\bar{B})=\frac{91}{100}$，$P(AB)=\frac{9}{100}$，$P(A\bar{B})=\frac{81}{100}$，

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}$，$P(\bar{B}|A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{\frac{81}{100}}{\frac{9}{10}}=\frac{9}{10}$，$\therefore L=\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9}$.……4 分

(2) $\because P(X\le10)=P(X\ge90)=\frac{1}{10}$，$\therefore P(10<X<90)=1-2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$，则 $Y\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$，……5 分

$\because Y$ 可能的取值为 $0,1,2,3$，……6 分 $\therefore P(Y=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$；$P(Y=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$；

$P(Y=2)=C_3^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}=\frac{48}{125}$；$P(Y=3)=C_3^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$；……10 分 $\therefore Y$ 的分布列为：

Y	0	1	2	3

P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

……11 分∴ 数学期望 $E(Y)=3\times\frac{4}{5}=2.4$ ……12 分

20．(1) $a_n=2n-1$；$b_n=3^{n-1}$；(2) $T_n=\frac{1}{2}\left(3^n-\frac{1}{2n+1}\right)$；(3) $\left(-\infty,\frac{9}{5}\right)$

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $\begin{cases}a_2=b_2\\a_5=b_3\end{cases}$ 得：$\begin{cases}1+d=q\\1+4d=q^2\end{cases}$，又 $q\neq1$，∴ $\begin{cases}d=2\\q=3\end{cases}$，

∴ $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，……2 分 $b_n=3^{n-1}$ ……4 分

(2) 由 (1) 得：$c_n=3^{n-1}+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=3^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，……6 分

∴ $T_n=\left(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1-3^n}{1-3}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(3^n-\frac{1}{2n+1}\right)$ ……8 分

(3) 由 (2) 得：$3^n-\frac{1}{2n+1}>(4n-3)t-\frac{1}{2n+1}$ 对任意的 $n\geq1$，$n\in\mathbf{N}$ 恒成立，

∴ $t<\frac{3^n}{4n-3}$ 对任意的 $n\geq1$，$n\in\mathbf{N}$ 恒成立；……9 分

令 $b_n=\frac{3^n}{4n-3}$，则 $b_{n+1}-b_n=\frac{3^{n+1}}{4n+1}-\frac{3^n}{4n-3}=\frac{(8n-10)\cdot3^n}{(4n-3)(4n+1)}$；……10 分

则当 $n=1$ 时，$b_2<b_1$；当 $n\geq2$ 时，$b_{n+1}>b_n$；∴ $(b_n)_{\min}=b_2=\frac{9}{5}$，∴ $t<\frac{9}{5}$，即实数 t 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{9}{5}\right)$ ……12 分

21．(1) $-\frac{3}{4}$；(2)①是，$(1,0)$；②证明见解析，$x_0=4$．

【详解】(1) 设点 $Q(x_Q,y_Q)$，$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，则 $\frac{x_Q^2}{4}+\frac{y_Q^2}{3}=1$，设直线 QA_1 和 QA_2 的斜率为 k_{QA_1}，k_{QA_2}，则

$k_{QA_1}\cdot k_{QA_2}=\frac{y_Q}{x_Q+2}\cdot\frac{y_Q}{x_Q-2}=\frac{y_Q^2}{x_Q^2-4}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_Q^2-4}{x_Q^2-4}=-\frac{3}{4}$；……3 分

(2) ①设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 l：$x=my+t$，联立方程得 $\begin{cases}x=my+t,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，

$y_1+y_2=\frac{-6mt}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2+4}$，……5 分

$k_1k_2=-\frac{9}{4}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+t-2)(my_2+t-2)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2}$，所以

$\frac{\frac{3t^2-12}{3m^2+4}}{m^2\cdot\frac{3t^2-12}{3m^2+4}+m(t-2)\left(\frac{-6mt}{3m^2+4}\right)+(t-2)^2}=-\frac{9}{4}$，即 $\left(1+\frac{9}{4}m^2\right)\frac{3t^2-12}{3m^2+4}-\frac{\frac{27}{2}m^2t(t-2)}{3m^2+4}+\frac{9}{4}(t-2)^2=0$，

因为 $t\neq2$，所以 $(4+9m^2)(t+2)-18m^2t+3(t-2)(3m^2+4)=0$，

化简整理可得 $16t-16=0$，即 $t=1$，所以直线 l 过定点 $F_2(1,0)$；……8 分

②解法一：设直线 A_1M 和直线 A_2N 的斜率为 k_{MA_1}，k_{NA_2}，由（1）得 $k_{MA_1}k_{MA_2}=-\frac{3}{4}$，由①得 $k_{NA_2}k_{MA_2}=-\frac{9}{4}$，所以

$\frac{k_{MA_1}}{k_{NA_2}}=\frac{\frac{y_0}{x_0+2}}{\frac{y_0}{x_0-2}}=\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{1}{3}$，所以 $x_0=4$；……12 分

解法二：设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线 l：$x=my+1$，联立方程得 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$ 所以 $my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，直线 l_{MA_1}：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，l_{NA_2}：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立两直线方程可得 $\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{1}{3}$，所以 $x_0=4$；……12 分

②解法三：：设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线 l：$x=my+1$，联立方程得 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，$l_{MA_1}$：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$l_{NA_2}$：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ 联立两直线方程可得

$\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$，因为 $y_1^2=\frac{3}{4}(4-x_1^2)$.所以 $\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1^2(x_2-2)}{y_2y_1(x_1+2)}=\frac{\frac{3}{4}(4-x_1)(x_2-2)}{y_2y_1(x_1+2)}$

$=-\frac{3}{4}\frac{(x_1-2)(x_2-2)}{y_2y_1}=-\frac{3}{4}\frac{(my_1-1)(my_2-1)}{y_1y_2}=\frac{1}{3}$，所以 $x_0=4$.……12 分

22. (1) a 的范围是 $(0,+\infty)$；(2)证明见解析

（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=-\frac{x+1}{x-1}$ 没有零点，不符合题意；……1 分

当 $a<0$ 时，若 $0<x<1$，则 $f(x)>0$；若 $x>1$，则 $f(x)<0$，不符合题意……2 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\frac{a}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 均单调递增.……3 分

当 $x>1$ 时，由 $f\left(e^{\frac{3}{a}+1}\right)=2+a-\frac{2}{e^{\frac{3}{a}+1}-1}>2+a-\frac{2}{e-1}>0$，$f\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=-\frac{2}{e^{\frac{1}{a}}-1}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有一个零点；……4 分

当 $0<x<1$，$f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)=-2+\frac{2}{1-e^{-\frac{1}{a}}}>0$，$f\left(e^{-\frac{7}{a}-1}\right)=-8-a+\frac{2}{1-e^{-\frac{7}{a}-1}}<0$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点，所以 a 的范围是 $(0,+\infty)$.……5 分

（2）因为 $f(x)$ 的两个零点为 x_1,x_2，所以 $\ln x_1=\frac{x_1+1}{a(x_1-1)}$，即 $\frac{1}{\ln x_1+\frac{1}{a}}=\frac{a(x_1-1)}{2x_1}$，同理，$\frac{1}{\ln x_2+\frac{1}{a}}=\frac{a(x_2-1)}{2x_2}$，

所以 $\frac{1}{\ln x_1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\ln x_2+\frac{1}{a}}=\frac{a(x_1-1)}{2x_1}+\frac{a(x_2-1)}{2x_2}=\frac{a}{2}\left[2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\right]$，……7 分

若 $f(x)=0$，即 $a\ln x-\frac{(x+1)}{x-1}=0$，则 $f\left(\frac{1}{x}\right)=a\ln\frac{1}{x}-\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}-1}=-a\ln x+\frac{(x+1)}{x-1}=-f(x)=0$，……9 分

所以 $f(x)$ 的两个零点 x_1,x_2 互为倒数，即 $x_2=\frac{1}{x_1}$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=x_1+\frac{1}{x_1}>2$（等号不成立），……11 分

所以 $2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)<0$，所以 $\frac{1}{\ln x_1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\ln x_2+\frac{1}{a}}=\frac{a(x_1-1)}{2x_1}+\frac{a(x_2-1)}{2x_2}=\frac{a}{2}\left[2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\right]<0$. ……12 分