高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：新高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|x^2-4x\leqslant 0\}$，则 $A\cup B=$

A. $(-2,4)$　　B. $(-2,4]$　　C. $(0,2)$　　D. $[0,2)$

2. 复数 $z=1-\frac{2-i}{1+2i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

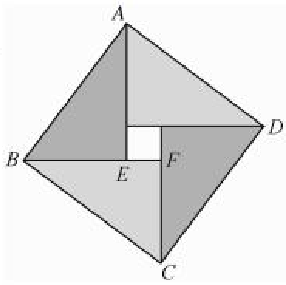
3. 某市为了迎接国家文明城市验收，要求某单位 4 名工作人员到路口执勤，协助交警劝导人们规范出行. 现有含甲、乙在内的 4 名工作人员，按要求分配到 2 个不同的路口执勤，每个路口至少一人，则甲、乙在同一路口的分配方案共有

A. 3 种　　B. 9 种　　C. 6 种　　D. 12 种

4. 2020 年 11 月 24 日 4 时 30 分，长征五号遥五运载火箭在我国文昌航天发射场成功发射，飞行约 2 200 秒后，顺利将探月工程嫦娥五号探测器送入预定轨道，开启我国首次地外天体采样返回之旅. 已知火箭的最大速度 v（单位：km/s）与燃料质量 M（单位：kg）、火箭质量 m（单位：kg）的函数关系为 $v=2\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$，若已知火箭的质量为 3 100 kg，火箭的最大速度为 11 km/s，则火箭需要加注的燃料为（参考数值为 $\ln 2\approx 0.69$；$\ln 244.69\approx 5.50$，结果精确到 0.01）

A. 243.69 t　　B. 244.69 t　　C. 890.23 t　　D. 755.44 t

5. 我国东汉末数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副“弦图”给出了勾股定理的证明，后人称其为“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如图所示. 在“赵爽弦图”中，若 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EF}$，则 $\overrightarrow{BF}=$



A. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{16}{25}\boldsymbol{a}+\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{12}{25}\boldsymbol{a}+\frac{9}{25}\boldsymbol{b}$

6. 下表是关于某设备的使用年限 x（单位：年）和所支出的维修费用 y（单位：万元）的统计表：

x	2	3	4	5	6
y	3.4	4.2	5.1	5.5	6.8

由上表可得线性回归方程 $\hat{y}=0.81x+\hat{a}$，若规定：维修费用 y 不超过 10 万元，一旦大于 10 万元时，该设备必须报废. 据此模型预测，该设备使用年限的最大值约为

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

7. 下列命题正确的是

A. 若 p：$\exists x_0<0,\frac{1}{x_0}>x_0$，则 $\neg p$：$\forall x>0,\frac{1}{x}\leqslant x$

B. 若 p：$\forall x>0,x^2>x$，则 $\neg p$：$\exists x_0>0,x_0^2<x_0$

C. $\exists x_0>0,\sin x_0\geqslant x_0$

D. “$a=1$”是“直线 $ax+y-1=0$ 与直线 $x+ay+1=0$ 平行”的充要条件

8. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=-x^2+x+1$，若实数 t 满足 $f(\lg t)>1$，则 t 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,10)$　　B. $\left(\frac{1}{10},1\right)\cup(1,10)$　　C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若非零实数 a,b 满足 $a>b$，则下列结论正确的是

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

C. $|a+b|<\sqrt{2(a^2+b^2)}$　　D. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>4$

10. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的右焦点为 F，左、右顶点分别为 A,B，一条渐近线为 l，则下列结论正确的是

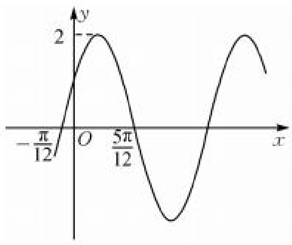
A. 当 $a=1$ 时，C 的离心率为 $\sqrt{2}$

B. 当 $a=1$ 时，直线 $y=x-1$ 与 C 仅有一个公共点

C. F 到 l 的距离为 1

D. 若 F 在 l 上的射影为 M，则经过 M,A,B 三点的圆的方程为 $x^2+y^2=1$

11. 如图，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$，则



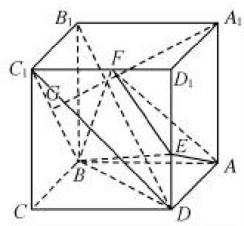
A. $\omega=1$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. 若 $f\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{6}{5}$，则 $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{3}{5}$

D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

12. 如图，在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 DD_1 上一点，且 $DE=2$，F 为棱 C_1D_1 的中点，点 G 是线段 BC_1 上的动点，则



A. 四面体 $A-BEF$ 的体积为 24

B. 直线 AE 与 BF 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{10}}{15}$

C. 无论点 G 在线段 BC_1 上如何移动，都有 $A_1G\perp B_1D$

D. 直线 A_1G 与平面 BDC_1 所成最大角的余弦值为 $\frac{1}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点 $A(x_0,-3)$ 到其焦点的距离是 A 到 y 轴距离的 2 倍，则 p 等于________.

14. “十二平均律”又称“十二等程律”是世界上通用的一组音（八度）分成 12 个半音音程的律制，是在 16 世纪由明朝皇族世子朱载堉（1536 年—1611 年）发现的. 具体是指一个八度有 13 个音，每相邻两个音之间的频率之比相等，且最后一个音的频率是最初那个音的频率的 2 倍，设第三个音的频率为 f_3，第七个音的频率为 f_7，则 $\frac{f_7}{f_3}=$________.

15. 已知球 O 的半径为$\frac{4}{3}$，点 A,B,C,D 均在球面上，若$\triangle ABC$ 为等边三角形，且其面积为$\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 的最大体积是________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x\geqslant 1,\\ \frac{1}{3}(x+5), x<1,\end{cases}$ 若 $x_2>x_1$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_1-x_2 的最大值是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在①$S_5=2S_3+5$，②$b_5=243$，③$a_1a_4=b_3$ 这三个条件中任选一个，补充在下列问题中，并作答.

设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$\{b_n\}$是正项等比数列，$a_1=b_1=3$，$a_4=b_2$，且________.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）如果 $a_m=b_n(m,n\in\mathbf{N}^*)$，写出 m,n 之间的关系式 $m=f(n)$，并求数列$\{f(n)\}$的前 n 项和 T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

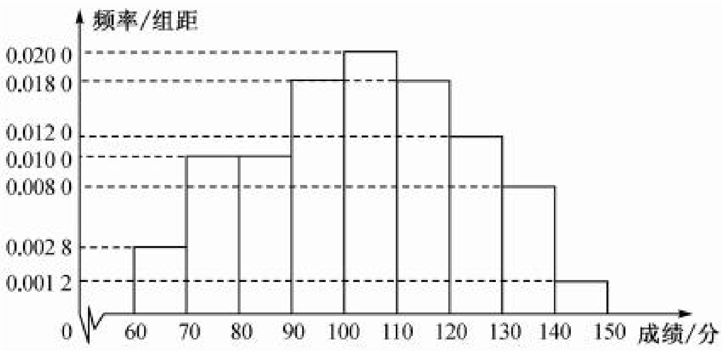
在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，AD 为$\triangle ABC$ 的中线，$c=2\sqrt{5}$，$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$2b^2=(b^2+c^2-a^2)(1-\tan A)$.

（1）求角 C 的大小；

（2）求 AD 的长.

19.（本小题满分 12 分）

2020 年某市教育主管部门为了解近期举行的数学竞赛的情况，随机抽取 500 名参赛考生的数学竞赛成绩进行分析，并制成如下的频率分布直方图：



（1）求这 500 名考生的本次数学竞赛的平均成绩 $\bar{x}$（精确到整数）；

（2）由频率分布直方图可认为：这次竞赛成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似等于样本的平均数 $\bar{x}$，σ 近似等于样本的标准差 s，并已求得 $s\approx 18$. 用该样本的频率估计总体的概率，现从该市所有考生中随机抽取 10 名学生，记这次数学竞赛成绩在$(86,140]$之外的人数为 Y，求 $P(Y=2)$的值（精确到 0.001）.

附：（1）当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$；

（2）$0.8186^8\times 0.1814^2\approx 0.0066$.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，短轴的上端点为 P，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-7$.

(1)求椭圆 C 的方程；

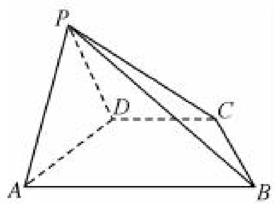
(2)若过点 $Q(1,0)$ 且不与 y 轴垂直的直线与椭圆 C 交于 M,N 两点，是否存在点 $T(t,0)$，使得直线 TM 与 TN 的斜率之积为定值？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB/\!/CD$，$AB\perp AD$，$CD=PD=AD=\frac{1}{2}AB$.

(1)求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PAB；

(2)若 $AP=DC=2$，求二面角 $D-PC-B$ 的正弦值.



22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=1-x-ax\ln x(a\in\mathbf{R})$，$g(x)=\frac{f(x)}{x+1}$.

(1)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)当 $0<a\leqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant m$ 恒成立，求整数 m 的最小值.

高三数学参考答案、提示及评分细则

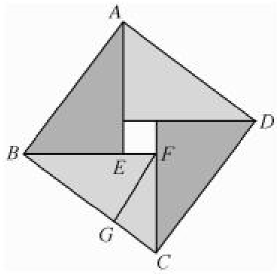
1. B　因为集合 $A=(-2,2)$，$B=[0,4]$，所以 $A\cup B=(-2,4]$. 故选 B.

2. D　复数 $z=1-\frac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=1-\frac{(2-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=1-\frac{-5\mathrm{i}}{5}=1+\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{2}$. 故选 D.

3. C　法一：把甲、乙两人看作一个整体，4 个人变成了 3 个元素，再把这 3 个元素分成 2 部分，每部分至少有 1 个人，然后分配到 2 个路口，共有 $C_3^2C_1^1A_2^2=6$ 种分配方案. 法二：设另外两人为丙、丁，按照要求列举，分别有{(甲乙丙)，丁}，{(甲乙丁)，丙}，{丁，(甲乙丙)}，{丙，(甲乙丁)}，{(甲乙)，(丙丁)}，{(丙丁)，(甲乙)}，共 6 种情况. 故选 C.

4. D　因为 $v=2\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$，所以 $11=2\ln\left(1+\frac{M}{3\ 100}\right)$，所以 $1+\frac{M}{3\ 100}=e^{5.5}$，所以 $M=3\ 100(e^{5.5}-1)\approx 3\ 100\times 243.69=755\ 439(\mathrm{kg})\approx 755.44(\mathrm{t})$. 故选 D.

5. C　法一：过 F 作 $FG\perp BC$ 于 G，不妨设 $BE=3$，$EF=1$，则 $BF=4$，$FC=BE=3$，所以 $BC=5$，$BG=\frac{16}{5}$，$FG=\frac{12}{5}$，所以 $\overrightarrow{BG}=\frac{16}{25}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{GF}=\frac{12}{25}\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GF}=\frac{16}{25}\overrightarrow{BC}+\frac{12}{25}\overrightarrow{BA}=\frac{16}{25}\boldsymbol{a}+\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$. 故选 C. 法二：$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}\right)$，即 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}(-\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA})$. 解得 $\overrightarrow{BF}=\frac{16}{25}\overrightarrow{BC}+\frac{12}{25}\overrightarrow{BA}$. 即 $\overrightarrow{BF}=\frac{16}{25}\boldsymbol{a}+\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$. 故选 C.



6. A　由已知表格，得 $\bar{x}=\frac{1}{5}(2+3+4+5+6)=4$，$\bar{y}=\frac{1}{5}(3.4+4.2+5.1+5.5+6.8)=5$，因为回归直线恒过样本点的中心 $(\bar{x},\bar{y})$，所以 $5=0.81\times 4+a$，解得 $a=1.76$，所以回归直线的方程为 $\hat{y}=0.81x+1.76$. 由 $y\leqslant 10$，得 $0.81x+1.76\leqslant 10$，解得 $x\leqslant\frac{824}{81}\approx 10.17$，由于 $x\in\mathbf{N}^*$，所以据此模型预报，该设备使用年限的最大值为 10. 故选 A.

7. D　由含有量词的命题的否定知，A，B 均错误；因为 $f(x)=x-\sin x(x>0)$，$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以对 $\forall x>0$，$f(x)>f(0)=0$，所以对 $\forall x>0$，$\sin x<x$，则 C 错误；由 $a\times a-1\times 1=0$，且 $a\times 1\neq 1\times(-1)$，解得 $a=1$，则 D 正确. 故选 D.

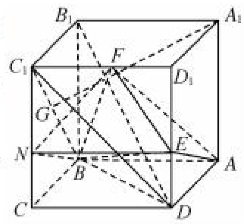
8. B　由题意知，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=-x^2+x+1$，则 $f(1)=f(0)=1$，又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(-1)=f(1)=1$，当 $f(x)>1$ 时，则 $-1<x<1$ 且 $x\neq 0$，所以由 $f(\lg t)>1$，得 $-1<\lg t<1$ 且 $\lg t\neq 0$，所以 $\frac{1}{10}<t<10$ 且 $t\neq 1$，则 t 的取值范围是 $\left(\frac{1}{10},1\right)\cup(1,10)$. 故选 B.

9. AC　对于 A，显然成立，则 A 正确；对于 B，若 a,b 均为负数，则不等式显然不成立，则 B 错误；对于 C，在 $a^2+b^2>2ab$ 两边同时加上 a^2+b^2，得 $2(a^2+b^2)>(a+b)^2$，则 $|a+b|<\sqrt{2(a^2+b^2)}$ 成立，则 C 正确；取 $a=2,b=-1$，则 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=(2-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{-1}\right)=-\frac{1}{2}<4$，所以 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>4$ 不成立，则 D 错误. 故选 AC.

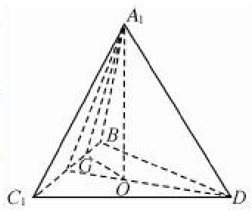
10. ABC　当 $a=1$ 时，双曲线 C 为 $x^2-y^2=1$，所以 $a=b=1$，$c=\sqrt{2}$，所以 $e=\sqrt{2}$，则 A 正确；当 $a=1$ 时，其渐近线为 $y=\pm x$，直线 $y=x-1$ 与渐近线 $y=x$ 平行，且过顶点 $(1,0)$ 与双曲线 C 仅有一个公共点，则 B 正确；因为 $F(\sqrt{a^2+1},0)$ 到渐近线 $x\pm ay=0$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{a^2+1}\pm a\times 0|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，则 C 正确；设 O 为坐标原点，$c=\sqrt{a^2+1}$，得 $b=|FM|=1$，结合

$|OF|=c$,得$|OM|=a$,则$|OM|=|OA|=|OB|$,从而$\angle AMB=90°$,所以经过M,A,B点的圆的方程为$x^2+y^2=a^2$(只有当$a=1$时,方程才是$x^2+y^2=1$),则D错误. 故选ABC.

11. BD　$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$,所以$T=\pi$,所以$\omega=2$,则A错误;$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,由$f(x)$的图象过点$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$,且在$x=-\frac{\pi}{12}$附近单调递增,所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,结合$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,可得$\varphi=\frac{\pi}{6}$,则B正确;由$f\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2\cos 2\alpha=\frac{6}{5}$,得$\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$,所以$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$,则C错误;$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,当$x=\frac{2\pi}{3}$时,$f(x)=-2$,所以函数$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称,则D正确. 故选BD.



12. ACD　$V_{三棱锥A-BEF}=V_{三棱锥F-ABE}=V_{三棱锥D_1-ABE}=V_{三棱锥B-AD_1E}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times6\times6=24$,则A正确;在棱$CC_1$上取点$N$,使$CN=2$,连结$BN,NE,FN$(如图),则易知$\angle FBN$为直线$AE$与$BF$所成角或其补角,可得$BN=2\sqrt{10}$,$FN=5$,$FB=9$,则$\cos\angle FBN=\frac{(2\sqrt{10})^2+9^2-5^2}{2\times9\times2\sqrt{10}}=\frac{8}{3\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{15}$,则直线$AE$与$BF$所成角的余弦值为$\frac{4\sqrt{10}}{15}$,则B错误;在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,易证$DB_1\perp$面$A_1BC_1$,又$A_1G\subset$平面$A_1BC_1$,所以$A_1G\perp B_1D$,则C正确;由题意知三棱锥$A_1-BDC_1$为棱长为$6\sqrt{2}$的正四面体,作$A_1O\perp$平面$BDC_1$,$O$为垂足,则$O$为正$\triangle BDC_1$的中心,且$\angle A_1GO$为直线$A_1G$与平面$BDC_1$所成角,所以$\cos\angle A_1GO=\frac{OG}{A_1G}=\sqrt{1-\frac{A_1O^2}{A_1G^2}}$,当点$G$移动到$BC_1$的中点时,$A_1G$最短,如图,此时$\cos\angle A_1GO$最小,$\angle A_1GO$最大,此时$\cos\angle A_1GO=\frac{OG}{A_1G}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$,则D正确. 故选ACD.

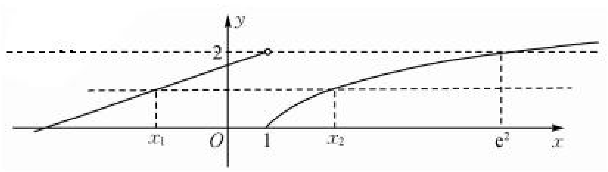


13. 3　由题意,得$2x_0=x_0+\frac{p}{2}$,解得$x_0=\frac{p}{2}$,即$A\left(\frac{p}{2},-3\right)$,代入$y^2=2px(p>0)$,得$(-3)^2=2p\cdot\frac{p}{2}$,结合$p>0$,解得$p=3$.

14. $\sqrt[3]{2}$　由题意知13个音的频率f_n成等比数列,设公比为q,则$\frac{f_{13}}{f_1}=q^{12}=2$,所以$\frac{f_7}{f_3}=q^4=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$.

15. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　设$\triangle ABC$外接圆的圆心为O_1,由$\triangle ABC$是面积为$\sqrt{3}$的等边三角形,得$\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$,解得$AB=2$,$O_1B=\frac{1}{2}\times\frac{AB}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 当三棱锥$D-ABC$体积最大时,球心$O$在$DO_1$上,因此有$OO_1=\sqrt{OB^2-O_1B^2}=\frac{2}{3}$,所以$DO_1$的最大值为2,三棱锥$D-ABC$的最大体积为$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot DO_1=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16. $3\ln 3-8$　因为$f(x)=\begin{cases}\ln x,x\geqslant1,\\ \frac{1}{3}(x+5),x<1,\end{cases}$令$\ln x=2$,解得$x=e^2$;令$\ln x=0$,解得$x=1$. 结合函数图象可知,



若要满足 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_2>x_1$，则 $x_2\in[1,e^2)$，且 $\frac{1}{3}(x_1+5)=\ln x_2$，解得 $x_1=3\ln x_2-5$. 则 $x_1-x_2=3\ln x_2-x_2-5$，$x_2\in[1,e^2)$，令 $g(x)=3\ln x-x-5$，$x\in[1,e^2)$，则 $g'(x)=\frac{3}{x}-1=\frac{3-x}{x}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=3$，故 $g(x)$在区间$(1,3)$上单调递增，在区间$(3,e^2)$上单调递减，则 $g(x)$在 $x=3$ 时取最大值 $g(3)=3\ln 3-8$，即 x_1-x_2 的最大值为 $3\ln 3-8$.

17. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

若选条件①：$S_5=2S_3+5$，

由 $S_5=2S_3+5$，得 $3\times5+\frac{5\times4}{2}\cdot d=2\left(3\times3+\frac{3\times2}{2}\cdot d\right)+5$，解得 $d=2$，所以 $a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，…… 3 分

所以 $b_2=a_4=9$，又 $b_1=3$，所以 $q=3$，所以 $b_n=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 5 分

若选条件②：$b_5=243$，

$b_5=243=3\times q^4$，则 $81=q^4$，因为 $q>0$，所以 $q=3$，则 $b_n=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，…… 3 分

所以 $a_4=b_2=9=3+3d$，解得 $d=2$，又 $a_1=3$，所以 $a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 5 分

若选条件③：$a_1a_4=b_3$

又 $a_1=3$，所以 $3a_4=b_3$，又 $a_4=b_2$，$3b_2=b_3$，则 $q=3$，则 $b_n=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，…… 3 分

$a_4=b_2=9$，$a_1=3$，得 $d=2$，则 $a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 5 分

(2)由 $a_m=b_n$，得 $2m+1=3^n$，即 $m=\frac{1}{2}(3^n-1)$，所以 $f(n)=\frac{3^n-1}{2}$，…… 7 分

$T_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\frac{1}{2}[(3^1-1)+(3^2-1)+\cdots+(3^n-1)]$

$=\frac{1}{2}(3^1+3^2+\cdots+3^n-n)$ …… 8 分

$=\frac{1}{2}\left[\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{3(1-3^n)}{-2}-n\right]$

$=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4}$. …… 10 分

18. 解：(1)在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，

所以 $2b^2=2bc\cos A\cdot\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}$，所以 $b=c(\cos A-\sin A)$，

由正弦定理，得 $\sin B=\sin C(\cos A-\sin A)$，…… 2 分

所以 $\sin(A+C)=\sin C(\cos A-\sin A)$，

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin C\cos A-\sin C\sin A$，

所以 $\sin A\cos C=-\sin C\sin A$. …… 4 分

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\cos C=-\sin C$，所以 $\tan C=-1$，

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{3\pi}{4}$. …… 6 分

(2)因为 $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，……………………………………………… 8 分

因为$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，所以 $a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$，所以 $BD=1$，……………………………………… 10 分

在$\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B$，

即 $AD^2=20+1-2\times2\sqrt{5}\times1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=13$，

所以 $AD=\sqrt{13}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)$\bar{x}=10(65\times0.0028+75\times0.01+85\times0.01+95\times0.018+105\times0.02+115\times0.018+125\times0.012+135\times0.008$ $+145\times0.0012)=10\times10.116=104.16\approx104$(分). ………………………………………… 5 分

(2)由题意知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\mu=104$，$\sigma=18$，

所以 $86=104-18=\mu-\sigma$，$140=104+18\times2=\mu+2\sigma$，………………………………………… 7 分

所以 $P(86<X\leqslant140)=P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=\frac{0.6827+0.9545}{2}=0.8186$，……………………… 9 分

所以 $P(X\leqslant\mu-\sigma$ 或 $X>\mu+2\sigma)=1-0.8186=0.1814$，……………………………………… 10 分

所以 $Y\sim B(10,0.1814)$，

所以 $P(Y=2)=C_{10}^2\times0.1814^2\times0.8186^8\approx45\times0.00663\approx0.298$. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)$P(0,b)$，设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则$\overrightarrow{PF_1}=(-c,-b)$，$\overrightarrow{PF_2}=(c,-b)$，

由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-7$，得 $b^2-c^2=-7$，…………………………………………………… 2 分

结合 $a^2=b^2+c^2$，得 $a^2-2c^2=-7$；………………………………………………………… 3 分

由 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，得 $c^2=\frac{8a^2}{9}$，代入 $a^2-2c^2=-7$，解得 $a^2=9$，$c^2=8$.

所以 $b^2=1$，……………………………………………………………………………………… 4 分

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由已知直线 l 过点 $Q(1,0)$，设 l 的方程为 $x=my+1$，

则联立方程组$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得$(m^2+9)y^2+2my-8=0$，

所以 $\Delta=4m^2+32(m^2+9)>0$；

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+9},\\ y_1y_2=-\frac{8}{m^2+9}.\end{cases}$ ……………………………………………… 8 分

又直线 TM 与 TN 斜率分别为 $k_{TM}=\frac{y_1}{x_1-t}=\frac{y_1}{my_1+1-t}$，$k_{TN}=\frac{y_2}{x_2-t}=\frac{y_2}{my_2+1-t}$，

则 $k_{TM}\cdot k_{TN}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+1-t)(my_2+1-t)}=\dfrac{-8}{(t^2-9)m^2+9(t-1)^2}$. ………… 10 分

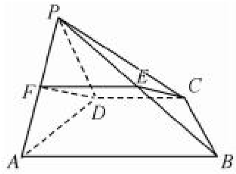
要使 $k_{TM}\cdot k_{TN}$ 为定值，则有 $t^2-9=0$，即 $t=\pm3$，

当 $t=3$ 时，$\forall m\in\mathbf{R}$，$k_{TM}\cdot k_{TN}=\dfrac{-8}{9(1-t)^2}=-\dfrac{2}{9}$；

当 $t=-3$ 时，$\forall m\in\mathbf{R}$，$k_{TM}\cdot k_{TN}=\dfrac{-8}{9(1-t)^2}=-\dfrac{1}{18}$.

所以存在点 $T(\pm3,0)$，使得直线 TM 与 TN 的斜率之积为定值. ………… 12 分

21.(1)证明：作 PB 的中点 E，AP 的中点 F，连接 DF，EF，EC.



因为点 E 是 PB 中点，点 F 是 PA 中点，所以 $EF\parallel AB$，且 $EF=\dfrac{AB}{2}$.

又因为 $AB\parallel CD$，且 $CD=\dfrac{AB}{2}$，所以 $EF\parallel CD$，且 $EF=CD$，

所以四边形 $EFDC$ 为平行四边形，所以 $CE\parallel DF$. ………… 2 分

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$AB\perp AD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD，又 $DF\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp DF$.

因为 $PD=AD$，点 F 为 PA 的中点，所以 $DF\perp AP$. ………… 4 分

因为 $CE\parallel DF$，所以 $CE\perp AB$，$CE\perp AP$.

又 $AP\cap AB=A$，$AP,AB\subset$ 平面 PAB，所以 $CE\perp$ 平面 PAB.

又因为 $CE\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAB. ………… 6 分

(2)解：作 AD，BC 的中点分别为 O，G，连结 OP，OG，则 $OG\parallel AB$，

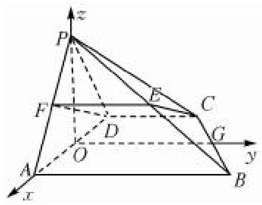
因为 $AB\perp$ 平面 PAD，$PO,AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PO$，$AB\perp AD$，所以 $OG\perp AD$，$OG\perp PO$.

因为 $AP=DC=2$，$CD=PD=AD=2$，所以△APD 为正三角形，

所以 $PO\perp AD$，$DF=PO=\sqrt{3}$，$AB=4$， ………… 7 分

所以 $PO\perp OG$，$PO\perp AD$，$OG\perp AD$，即 OA，OG，OP 两两垂直，

以点 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$（如图所示）. 则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，$B(1,4,0)$，



所以 $\overrightarrow{PD}=(-1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(-1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,0)$. ………… 9 分

设平面 PDC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x-\sqrt{3}z=0,\\ -x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}z,\\ y=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$； ………… 10 分

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-x'+2y'-\sqrt{3}z'=0,\\ -2x'-2y'=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}y'=-x',\\ z'=-\sqrt{3}x',\end{cases}$ 取 $x'=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(-1,1,\sqrt{3})$， ………… 11 分

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以 $\sin\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以二面角 $D-PC-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ………………………… 12 分

22. 解：当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{2}(\ln x-1)$，………………………… 1 分

由 $f'(x)<0$，得 $0<x<e$；由 $f'(x)>0$，得 $x>e$，………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(e)=1-\frac{e}{2}$. ………………………… 4 分

(2)①当 $x\geqslant1$ 时，因为 $0<a\leqslant1$，$f'(x)=-1-a\ln x-a<0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=0$，则 $f(x)\leqslant0$，又 $x+1>0$，所以 $g(x)\leqslant0$（当 $x=1$ 时等号成立），所以 $m\geqslant0$. ………………………… 5 分

②当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，又当 $0<a\leqslant1$，时 $ax\leqslant x$，所以 $ax\ln x\geqslant x\ln x$，所以 $-ax\ln x\leqslant-x\ln x$，所以 $1-x-ax\ln x\leqslant 1-x-x\ln x$，即 $f(x)\leqslant1-x-x\ln x$.

因为 $x+1>0$，所以 $g(x)\leqslant\frac{1-x-x\ln x}{x+1}$，………………………… 6 分

令 $h(x)=\frac{1-x-x\ln x}{x+1}$ $(x\in(0,1))$，所以问题化为 $h(x)\leqslant m$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

因为 $h'(x)=\frac{-x-3-\ln x}{(x+1)^2}$，令 $\varphi(x)=-x-3-\ln x$，$x\in(0,1)$，则 $\varphi'(x)=-1-\frac{1}{x}<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，又因为 $\varphi\left(\frac{1}{e^4}\right)=1-\frac{1}{e^4}>0$，$\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right)=-\frac{1}{e^3}<0$，

所以存在唯一一个实数 $x_0\in\left(\frac{1}{e^4},\frac{1}{e^3}\right)$，使得 $\varphi(x_0)=-x_0-3-\ln x_0=0$，

所以 $\ln x_0=-x_0-3$，………………………… 8 分

所以当 $0<x<x_0$ 时，$\varphi(x)>0$，则 $h'(x)>0$，当 $x_0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$，则 $h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增；在 $(x_0,1)$ 上单调递减；

所以 $h(x)_{\max}=h(x_0)=\frac{1-x_0-x_0\ln x_0}{x_0+1}=\frac{1-x_0+x_0(x_0+3)}{x_0+1}=\frac{x_0^2+2x_0+1}{x_0+1}=x_0+1$，………………………… 10 分

因为 $x_0\in\left(\frac{1}{e^4},\frac{1}{e^3}\right)$，所以 $x_0+1\in\left(1+\frac{1}{e^4},1+\frac{1}{e^3}\right)$，所以 $h(x)_{\max}\in\left(1+\frac{1}{e^4},1+\frac{1}{e^3}\right)$，

即 $h(x)_{\max}<1+\frac{1}{e^3}$，所以 $m\geqslant1+\frac{1}{e^3}$，

综上所述，$m\geqslant1+\frac{1}{e^3}$，又 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m\geqslant2$.

所以 m 的最小整数值为 2. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。