

理科数学

命题：华中师范大学考试研究院

本试题卷共 4 页，23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将答题卡上交。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cup B$ 的子集个数是
A. 4 B. 8 C. 16 D. 32
2. 设 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{|i|}{2-i}$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 甲、乙、丙、丁四人商量是否参加研学活动。甲说：“乙去我就肯定去。”；乙说：“丙去我就不去。”；丙说：“无论丁去不去，我都去。”；丁说：“甲乙中至少有一人去，我就去。”
以下哪项推论可能是正确的
A. 乙、丙两个人去了 B. 甲一个人去了
C. 甲、丙、丁三个人去了 D. 四个人都去了
4. 对某网店一周内每天的订单数进行了统计，得到样本的茎叶图(如图所示)，若已知该周内日平均订单是 32 个，则该周内日订单数的方差是
A. $\frac{908}{7}$ B. $\frac{909}{7}$ C. 130 D. $\frac{911}{7}$
5. 若抛物线 $y^2 = -2px (p > 0)$ 的准线与圆 $(x-8)^2 + y^2 = 81$ 的直径垂直，且交点为直径的三等分点，则 $p =$
A. 10 B. 12 C. $\sqrt{10}$ 或 22 D. 12 或 24
6. 我国古代数学名著《九章算术》中将正四棱锥称为方锥。已知半径为 R 的半球内有一个方锥，方锥的所有顶点都在半球所在球的球面上，方锥的底面与半球的底面重合，若方锥的体积为 $\frac{16}{3}$ ，则半球的表面积为
A. 4π B. 8π C. 12π D. 16π

7. 已知实数 x, y 满足约束条件：
$$\begin{cases} 3x-2y-2 \leq 0, \\ y \leq 4, \\ 2x+y-2 \geq 0, \end{cases}$$
 则目标函数 $z = (x+1)^2 + (y-2)^2$ 的取值范围是

- A. $[\frac{4}{5}, \frac{205}{9}]$ B. $[\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{205}{9}]$ C. $[2, \frac{205}{9}]$ D. $[\frac{4}{5}, \frac{313}{49}]$

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$, $AC = \sqrt{3}$, 则 $2BC - AB$ 的最大值为

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. 不存在

9. 已知以双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴、虚轴为两条对角线的四边形的面积为 16, 且双曲线的两条渐近线将坐标平面四等分, 则该双曲线的方程为

- A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 1$

10. 一个几何体的三视图如图所示，则它的侧面积为

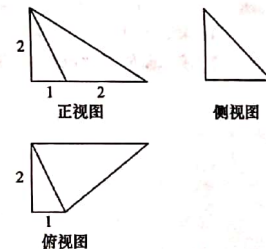
- A. $\sqrt{17} + \sqrt{2} + 9$ B. $\sqrt{17} + \sqrt{2} + 5$
C. $2\sqrt{17} + 2\sqrt{2} + 10$ D. $\sqrt{17} + \sqrt{2} + 10$

11. 现有 10 名学生排成一排，其中 4 名男生，6 名女生，若有且只有 3 名男生相邻排在一起，则不同的排法共有

- A. $A_6^6 A_4^3$ 种 B. $A_4^3 A_7^6$ 种
C. $A_3^3 A_6^6 A_4^3$ 种 D. $A_4^3 A_6^6 A_7^6$ 种

12. 已知 $f(x) = (ae^x + x + 1)(e^x + x + 1)$ 与 $g(x) = e^{2x}$ 的图象至少有三个不同的公共点，其中 e 为自然数的底数，则 a 的取值范围是

- A. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, 1)$
C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ D. $(1, \sqrt{2})$



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -2, \\ x-2, & x \geq -2, \end{cases}$ 则 $f(f(-1)) =$ _____.
14. 已知 θ 为锐角，若 $\tan\theta$ 是方程 $2x^2 - 9x - 5 = 0$ 的一根，则 $\frac{\sin^2\theta - 4\cos^2\theta}{5\sin^2\theta + \cos^2\theta} =$ _____.
15. 已知向量 $a = (-k, 3)$, $b = (2, m)$, $k > 0$ 且 $a \cdot b = 4$, 向量 b 在 a 方向上的投影为 $\frac{4}{5}$, 则实数 $m+k$ 的值为 _____.
16. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$, 给出下列结论：
① $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称；
② $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称；
③ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ；
④ $f(x)$ 是周期函数，
其中正确结论有 _____。(请填写序号)

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$, 首项 $a_1=1$, 且 a_2, a_3+1, a_5-1 构成等比数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

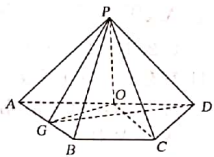
(II) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = -2^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD=2BC=2CD=4$, $PA=PD=2\sqrt{2}$, AD, AB 的中点分别是 O, G .

(I) 求证: $GO \perp$ 平面 POC ;

(II) 求二面角 $D-PG-O$ 的余弦值.



19. (12分)

2018年新课标II卷理科物理高考试题的选择题是这样的:

二、选择题: 本题共8小题, 每小题6分, 共48分. 在每小题给出的四个选项中, 第14~18题只有一项符合题目要求, 第19~21题有多项符合题目要求. 全部选对的得6分, 选对但不全的得3分, 有选错的得0分. 每年高考后都会对每题的得分情况进行一个大致的统计, 特地对第19题的得分情况进行调研, 从某省所有试卷中随机抽取1000份试卷, 其中第19题的得分组成容量为1000的样本, 统计结果如下表:

| | | | |
|----|-----|-----|-----|
| 得分 | 0 | 3 | 6 |
| 人数 | 200 | 300 | 500 |

(I) 求这1000份试卷中第19题的得分的中位数和平均数;

(II) 若某校的两名高三学生因故未参加考试, 如果这两名学生参加考试, 以样本中各种得分情况的频率作为这两名同学相应的各种得分情况的概率. 试求这两名同学理综卷第19题的得分之和 X 的分布列及数学期望.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 半焦距为 c , 过点 $B(a, -c)$ 作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足分别为点 B_1, B_2 , 且四边形 OB_1BB_2 的面积为2.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 已知经过点 B 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 设直线 B_1M 与直线 B_1N 的倾斜角分别为 α, β , 且 $\tan\alpha \tan\beta \neq 1$, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的取值范围.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x - (k+1)x$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若不等式 $k \leq f(x) \leq 1$ 对任意 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

请考生在第22、23两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=4-\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 是参数), 以原点为极点, x 轴的非负半轴

为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$.

(I) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 设点 M 在曲线 C 上, 曲线 C 在点 M 处的切线与直线 l 垂直, 求点 M 的直角坐标.

23. [选修4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |2x+1| + |x-4|$.

(I) 解不等式 $f(x) \leq 10$;

(II) 若不等式 $f(x) + |x-4| < a^2 - 8a$ 的解集不是空集, 求实数 a 的取值范围.