# 2019 年全国高中数学联赛模拟试题（七）

## 第一试

### 一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、设集合 $M=\{-2,0,1\}$，$N=\{1,2,3,4,5\}$，映射 $f$：$M\to N$ 使对任意的 $x\in M$，都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数，则这样的映射 $f$ 的个数是

（A）45　　（B）27　　（C）15　　（D）11

2、已知 sin2　=$a$，cos2　=$b$，0<　<$\frac{\pi}{4}$，给出 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 值的五个答案：

①$\frac{b}{1-a}$；　②$\frac{a}{1-b}$；　③$\frac{1+b}{a}$；　④$\frac{1+a}{b}$；　⑤$\frac{a-b+1}{a+b-1}$.

其中正确的是：

（A）①②⑤　　（B）②③④　　（C）①④⑤　　（D）③④⑤

3、若干个棱长为 2、3、5 的长方体，依相同方向拼成棱长为 90 的正方体，则正方体的一条对角线贯穿的小长方体的个数是

（A）64　　（B）66　　（C）68　　（D）70

4、递增数列 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ⋯，由一些正整数组成，它们或者是 3 的幂，或者是若干个 3 的幂之和，则此数列的第 100 项为

（A）729　　（B）972　　（C）243　　（D）981

5、$\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^5+\mathrm{C}_n^9+\cdots+\mathrm{C}_n^{4m+1}$（其中 $m=\left[\dfrac{n-1}{4}\right]$，$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数）的值为

（A）$\sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}$　　（B）$\sqrt{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$

（C）$\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+\sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$　　（D）$\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+\sqrt{2^n}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

6、一个五位的自然数 $\overline{abcde}$ 称为“凸”数，当且仅当它满足 $a<b<c$，$c>d>e$（如 12430，13531 等），则在所有的五位数中“凸”数的个数是

（A）8568　　（B）2142　　（C）2139　　（D）1134

## 二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、过椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上任意一点 $P$，作椭圆的右准线的垂线 $PH$（$H$ 为垂足）并延长 $PH$ 到 $Q$，使得 $HQ=\ \ PH$（ $\geqslant 1$）．当点 $P$ 在椭圆上运动时，点 $Q$ 的轨迹的离心率的取值范围是________．

2、已知异面直线 $a$、$b$ 所成的角为 60°，过空间一点 $P$ 作与 $a$、$b$ 都成角（0<　<90°）的直线 $l$，则这样的直线 $l$ 的条数是 $f(\ \ )$=______．

3、不等式 $\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$ 的解集为__________．

4、设复数 $z$ 满足条件 $|z-\mathrm{i}|=1$，且 $z\neq 0$，$z\neq 2\mathrm{i}$，又复数　使得 $\dfrac{\omega-2\mathrm{i}}{\omega}\cdot\dfrac{z}{z-2\mathrm{i}}$ 为实数，则复数　$-2$ 的辐角主值的取值范围是________．

5、设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2002}$ 均为正实数，且 $\dfrac{1}{2+a_1}+\dfrac{1}{2+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{2+a_{2002}}=\dfrac{1}{2}$，则

$a_1a_2\cdots a_{2002}$的最小值是____________________.

6、在一个由十进制数字组成的数码中，如果它含有偶数个数字 8，则称它为“优选”数码（如 12883，787480889 等），否则称它为“非优选”数码（如 2348756，958288 等），则长度不超过 $n$（$n$ 为自然数）的所有“优选”数码的个数之和为________________.

**三、（20 分）**

已知数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，且前 $n$ 项和为 $S_n$.

（1）用 $S_n$ 表示 $S_{n+1}$；

（2）是否存在自然数 $c$ 和 $k$，使得$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$成立.

**四、（20 分）**

设异面直线 $a$、$b$ 成 60° 角，它们的公垂线段为 $EF$，且$|EF|=2$，线段 $AB$ 的长为 4，两端点 $A$、$B$ 分别在 $a$、$b$ 上移动．求线段 $AB$ 中点 $P$ 的轨迹方程.

**五、（20 分）**

已知定义在 $R^+$上的函数 $f(x)$满足

（i）对于任意 $a$、$b\in R^+$，有 $f(ab)=f(a)+f(b)$；

（ii）当 $x>1$ 时，$f(x)<0$；

（iii）$f(3)=-1$.

现有两个集合 $A$、$B$，其中集合 $A=\{(p,q)\mid f(p^2+1)-f(5q)-2>0，p、q\in R^+\}$，集合 $B=\{(p,q)\mid f(\frac{p}{q})+\frac{1}{2}=0，p、q\in R^+\}$．试问是否存在 $p$、$q$，使 $A\cap B\neq\varnothing$，说明理

由.

## 第二试

一、（50 分）

如图，$AM$、$AN$ 是 $\odot O$ 的切线，$M$、$N$ 是切点，$L$ 是劣弧 $MN$ 上异于 $M$、$N$ 的点，过点 $A$ 平行于 $MN$ 的直线分别交 $ML$、$NL$ 于点 $Q$、$P$. 若 $S_{\odot O}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}S_{\triangle POQ}$，求证：$\angle POQ=60°$ .

二、（50 分）

已知数列 $a_1=20$，$a_2=30$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$（$n\geqslant1$）. 求所有的正整数 $n$，使得 $1+5a_na_{n+1}$ 是完全平方数.

三、（50 分）

设 $M$ 为坐标平面上坐标为 $(p\cdot2002, 7p\cdot2002)$ 的点，其中 $p$ 为素数. 求满足下列条件的直角三角形的个数：

（1）三角形的三个顶点都是整点，而且 $M$ 是直角顶点；

（2）三角形的内心是坐标原点.