试卷类型：A

2023年深圳市高三年级第一次调研考试

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生请务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知i为虚数单位，$(1+\mathrm{i})z=2$，则 $z=$

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1-\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

2. 满足等式 $\{0,1\}\cup X=\{x\in\mathbf{R}\mid x^3=x\}$ 的集合 X 共有

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

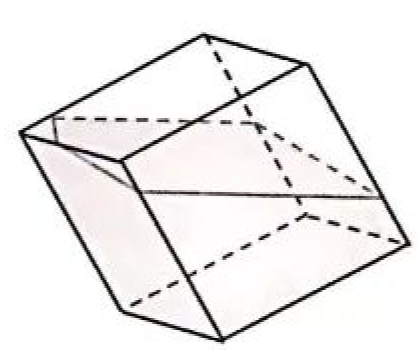
3. 已知 $f(x)$ 为奇函数，且 $x<0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f(\mathrm{e})=$

A. e^{e}　　B. $-\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$　　C. $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$　　D. $-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$

4. 如图，一个棱长1分米的正方体形封闭容器中盛有V升的水，若将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，则V的取值范围是

A. $(\frac{1}{6},\frac{5}{6})$　　B. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

C. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$　　D. $(\frac{1}{6},\frac{1}{2})$

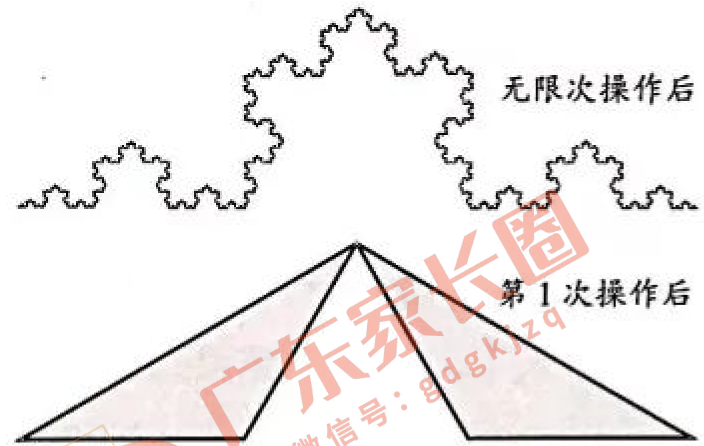


（第4题图）

5. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为单位向量，且$|3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}|=7$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

6. 将一个顶角为120°的等腰三角形(含边界和内部)的底边三等分，挖去由两个等分点和上顶点构成的等边三角形，得到与原三角形相似的两个全等三角形，再对余下的所有三角形重复这一操作．如果这个操作过程无限继续下去⋯，最后挖剩下的就是一条“雪花”状的Koch曲线，如图所示．



（第 6 题图）

已知最初等腰三角形的面积为 1，则经过 4 次操作之后所得图形的面积是

A. $\dfrac{16}{81}$　　B. $\dfrac{20}{81}$　　C. $\dfrac{8}{27}$　　D. $\dfrac{10}{27}$

7. 安排 5 名大学生到三家企业实习，每名大学生只去一家企业，每家企业至少安排 1 名大学生，则大学生甲、乙到同一家企业实习的概率为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{3}{10}$　　C. $\dfrac{3}{25}$　　D. $\dfrac{6}{25}$

8. 已知函数$f(x)=2+\ln x$，$g(x)=a\sqrt{x}$，若总存在两条不同的直线与函数$y=f(x)$，$y=g(x)$图象均相切，则实数a的取值范围为

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $(1,\mathrm{e})$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数$f(x)$的图象是由函数$y=2\sin x\cos x$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位得到，则

A. $f(x)$的最小正周期为π

B. $f(x)$在区间$[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$上单调递增

C. $f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称

D. $f(x)$的图象关于点$(\dfrac{\pi}{6},0)$对称

10．已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的准线为 l，直线 $x=my+n$ 与 C 相交于 A、B 两点，M 为 AB 的中点，则

A．当 $n=\dfrac{1}{2}$ 时，以 AB 为直径的圆与 l 相交

B．当 $n=2$ 时，以 AB 为直径的圆经过原点 O

C．当 $|AB|=4$ 时，点 M 到 l 的距离的最小值为2

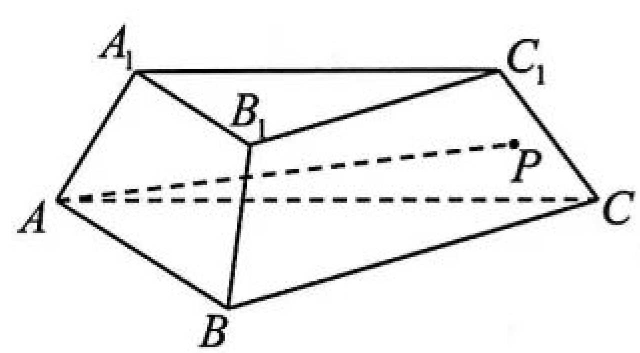
D．当 $|AB|=1$ 时，点 M 到 l 的距离无最小值

11．已知函数 $f(x)=x(x-3)^2$，若 $f(a)=f(b)=f(c)$，其中 $a<b<c$，则

A．$1<a<2$　　　　B．$a+b+c=6$

C．$a+b>2$　　　　D．abc 的取值范围是 $(0,4)$

12．如图，已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面边长分别为2和3，侧棱长为1，点 P 在侧面 BCC_1B_1 内运动（包含边界），且 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $\sqrt{6}$，则



（第12题图）

A．CP 长度的最小值为 $\sqrt{3}-1$

B．存在点 P，使得 $AP\perp BC$

C．存在点 P，存在点 $Q\in B_1C_1$，使得 $AP\,//\,A_1Q$

D．所有满足条件的动线段 AP 形成的曲面面积为 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}\pi$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．$(1-x)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为________（用数字做答）.

14．若椭圆上的点到焦点距离的最大值是最小值的2倍，则该椭圆的离心率为________.

15．定义开区间 (a,b) 的长度为 $b-a$．经过估算，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-x^{\frac{1}{3}}$ 的零点属于开区间________（只要求写出一个符合条件，且长度不超过 $\dfrac{1}{6}$ 的开区间）.

16．设 $a>0$，$A(2a,0)$，$B(0,2)$，O 为坐标原点，则以 OA 为弦，且与 AB 相切于点 A 的圆的标准方程为____________；若该圆与以 OB 为直径的圆相交于第一象限内的点 P（该点称为直角△OAB 的 Brocard 点），则点 P 横坐标 x 的最大值为________.

广东家长圈 微信号：gdgkjzq

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_n=\frac{a_n}{2}+n^2+1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求 a_1+a_2，并证明 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是等差数列；

（2）求 S_n．

18．（12 分）

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b+c=2a\sin(C+\frac{\pi}{6})$．

（1）求 A；

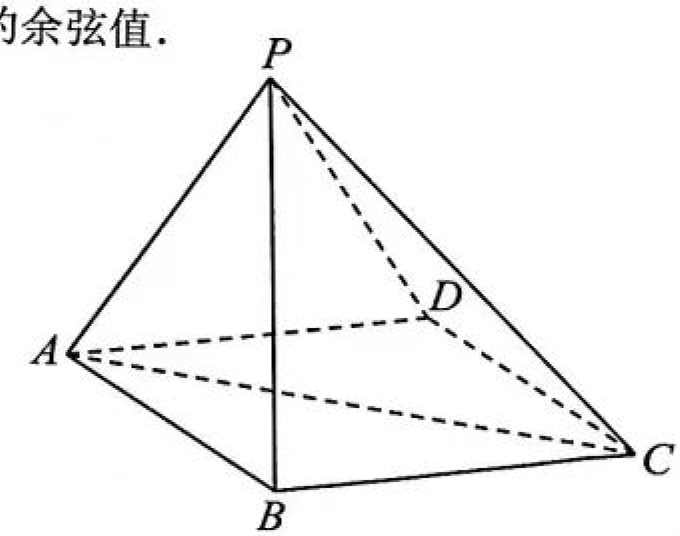
（2）设 AB 的中点为 D，若 $CD=a$，且 $b-c=1$，求△ABC 的面积．

19．（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp AB$，且 $PD=PB$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$．

（1）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 $PA\perp PC$，求平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值．



（第 19 题图）

20.（12分）

某企业因技术升级，决定从2023年起实现新的绩效方案．方案起草后，为了解员工对新绩效方案是否满意，决定采取如下“随机化回答技术”进行问卷调查：

一个袋子中装有三个大小相同的小球，其中1个黑球，2个白球．企业所有员工从袋子中有放回的随机摸两次球，每次摸出一球．约定“若两次摸到的球的颜色不同，则按方式Ⅰ回答问卷，否则按方式Ⅱ回答问卷”．

方式Ⅰ：若第一次摸到的是白球，则在问卷中画“○”，否则画“×”；

方式Ⅱ：若你对新绩效方案满意，则在问卷中画“○”，否则画“×”．

当所有员工完成问卷调查后，统计画○，画×的比例．用频率估计概率，由所学概率知识即可求得该企业员工对新绩效方案的满意度的估计值．其中，

$$满意度=\frac{企业所有对新绩效方案满意的员工人数}{企业所有员工人数}\times 100\%.$$

（1）若该企业某部门有9名员工，用X表示其中按方式Ⅰ回答问卷的人数，求X的数学期望；

（2）若该企业的所有调查问卷中，画“○”与画“×”的比例为$4:5$，试估计该企业员工对新绩效方案的满意度．

21.（12分）

已知双曲线E：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$与直线l：$y=kx-3$相交于A、B两点，M为线段AB的中点．

（1）当k变化时，求点M的轨迹方程；

（2）若l与双曲线E的两条渐近线分别相交于C、D两点，问：是否存在实数k，使得A、B是线段CD的两个三等分点？若存在，求出k的值；若不存在，说明理由．

22.（12分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a(x+4)}{\mathrm{e}^x}$，其中 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$．

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的“不动点”．求函数 $f(x)$ 的“不动点”的个数；

（3）若关于 x 的方程 $f(f(x))=f(x)$ 有两个相异的实数根，求 a 的取值范围．