无锡市2022年秋学期高三期终教学质量调研测试

数学

一、选择题.

1. 设集合 $A=\{x|x=2k-1,k\in\mathrm{Z}\}$，$B=\{x|0\leqslant x+1<6\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,3\}$　　B. $\{-1,1,3\}$　　C. $\{1,3,5\}$　　D. $\{-1,1,3,5\}$

【答案】B

【解析】依题意 $A\cap B$ 即是取 $B=\{x|-1\leqslant x<5\}$ 中的奇数元素，故选 B.

2. “$a=1$”是“复数 $\dfrac{a^2+i}{1-i}(a\in\mathrm{R})$ 为纯虚数”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】当 $a=1$ 时，复数为i，是纯虚数，当 $\dfrac{a^2+i}{1-i}$ 是纯虚数，则 $a=\pm1$，充分不必要，故选 A.

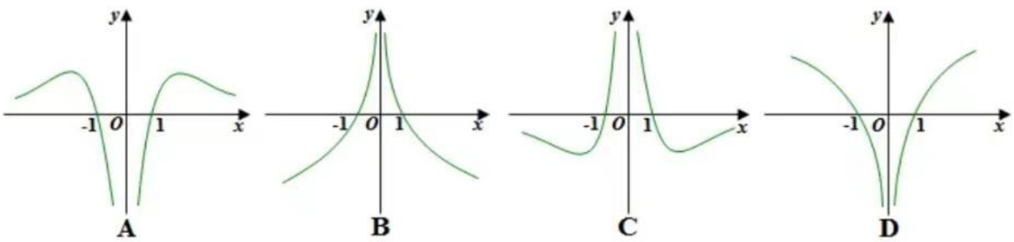
3. 若 $\tan\alpha>\sin\alpha>\sin2\alpha$，$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha\in$

A. $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

【答案】D

【解析】因为 $\tan\alpha>\sin\alpha$，有图像可知，排除 AB，取 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin\alpha<\sin2\alpha$，排除 C，故选 D.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{2^x\ln x^2}{4^x+1}$ 的部分图象大致为



【答案】A

【解析】易得 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{2^x+\dfrac{1}{2^x}}$ 为偶函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，

当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant0$，又 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$，故选 A.

5. 已知 m,n 为异面直线，$m\perp$ 平面 α，$n\perp$ 平面 β. 若直线 l 满足 $l\perp m$，$l\perp n$，$l\not\subset\alpha$，$l\not\subset\beta$. 则下列说法正确的是

A. $\alpha // \beta, l // \alpha$　　B. $\alpha \perp \beta, l \perp \beta$

C. α与β相交，且交线平行于l　　D. α与β相交，且交线垂直于l

【答案】C

【解析】因为m,n异面，则α与β相交于a，那么a垂直于m,n所在平面，又l也垂直于m,n所在平面，所以l一定与α,β的交线a平行，故选C.

6. 在平行四边形$ABCD$中，已知$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC},|\overrightarrow{AE}|=2,|\overrightarrow{AF}|=2\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$

A. -9　　B. -6　　C. 6　　D. 9

【答案】A

【解析】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})\cdot\frac{3}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF})=\frac{9}{8}(AE^2-AF^2)=-9$，故选$A$.

7. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$的直线与双曲线左、右两支分别交于点$P,Q$，若$\overrightarrow{PQ}=-4\overrightarrow{PF_1}$，$M$为$PQ$的中点，且$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】依题意$PF_2=QF_2$又由双曲线定义可得$5(PF_2-2a)=QF_2+2a$

得$PF_2=3a$，$Rt\triangle F_1F_2M$中，$9a^2+5a^2=4c^2$，所以$e=\frac{\sqrt{14}}{2}$，故选C.

8. 设$a=\frac{2}{7}$，$b=\ln1.4$，$c=e^{0.4}-1.32$，则下列关系正确的是

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

【答案】D

【解析】a,b,c依次构造函数$f(x)=\frac{x}{1+x}$，$g(x)=\ln(1+x)$，$h(x)=e^x-(1+2x^2)$，

再由函数拟合得$b>a>c$，故选D.

二、选择题

9. 已知由样本数据(x_i,y_i) $(i=1,2,3,\cdots,10)$组成的一个样本，得到经验回归方程为$\hat{y}=2x-0.4$，且$\bar{x}=2$，去除两个样本点$(-2,1)$和$(2,-1)$后，得到新的经验回归方程为$\hat{y}=3x+\hat{b}$. 在余下的8个样本数据和新的经验回归方程中

A. 相关变量x,y具有正相关关系

B. 新的经验回归方程为$\hat{y}=3x-3$

C. 随着自变量x值增加，因变量y值增加速度变小

D. 样本$(4,8.9)$的残差为-0.1

【答案】ABD

【解析】$\sum_{i=1}^{10}x_i=20$，x 新平均数 $\frac{1}{8}\times20=2.5$，$\bar{y}=2\times2-0.4=3.6$.

y 新平均数 $\frac{1}{8}\times10\times3.6=4.5$，$\therefore 4.5=3\times2.5+\hat{b}$，$\therefore \hat{b}=-3$.

对于 A，新的线性回归方程 $\hat{y}=3x+\hat{b}$，x,y 具有正相关关系，A 对；

对于 B，新的线性回归方程：$\hat{y}=3x-3$，B 对；

对于 C，回归方程为一次线性函数，C 错；

对于 D，$x=4,\hat{y}=9$，$8.9-9=-0.1$，D 对. 故选 ABD.

10. 已知 F_1,F_2 为曲线 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$ 的焦点，则下列说法正确的是

A. 若曲线 C 的离心率 $e=\frac{1}{2}$，则 $m=3$

B. 若 $m=-12$，则曲线 C 的两条渐近线夹角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 若 $m=3$，曲线 C 上存在四个不同点 P，使得 $\angle F_1PF_2=90^\circ$

D. 若 $m<0$，曲线 C 上存在四个不同点 P，使得 $\angle F_1PF_2=90^\circ$

【答案】BD

【解析】对于 A，显然焦点的坐标轴不确定，m 有两解，A 错；

对于 B，$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，渐近线 $y=\pm\sqrt{3}x$，两渐近线夹角为 60°，B 对；

对于 C，$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$PO=c=1<\sqrt{3}$，不存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，C 错；

对于 D，由于多选题，就不看啦. 故选 BD.

11. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面边长为 2，D 是 AC 中点，若该正三棱柱恰有一内切球，下列说法正确的是

A. 平面 $BDC_1\perp$ 平面 ACC_1A_1

B. $B_1D\perp$ 平面 BDC_1

C. 该正三棱柱体积为 2

D. 该正三棱柱外接球的表面积为 $\frac{10\pi}{3}$

【答案】AC

【解析】由俯视图可知球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则正三棱柱高为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 正三棱柱体积 $V=Sh=2$，

又正三棱柱外接球的球心同正三棱柱中心，则 $R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{5}{3}$，

外接球的表面积 $S_{表}=4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$，故 C 对 D 错；由于 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，故 A 对；

由余弦定理知 $\angle B_1DC_1\neq90^\circ$，故 B 错. 故选 AC.

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+2(\omega>0,\varphi\in\mathrm{R})$ 满足 $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+f(x)=4$. 下列说法正确的是

A. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$

B. 当 $|x_2-x_1|\leqslant\frac{\pi}{2}$，都有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 1$，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{12},\pi\right)$ 上单调递增，则方程 $f(x)=\frac{5}{2}$ 在 $[0,2\pi)$ 上最多有 4 个不相等的实数根

D. 设 $g(x)=f\left(x-\frac{\varphi}{\omega}\right)$，存在 $m,n\left(\frac{\pi}{2}\leqslant m<n\leqslant\pi\right)$，$g(m)+g(n)=6$，则 $\omega\in\left[\frac{9}{2},5\right]\cup\left[\frac{13}{2},+\infty\right)$

【答案】ACD

【解析】对于 A，由 $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+f(x)=4$，$f(x)$ 一个对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$，$A$ 对；

对于 B，由于振幅为 1，取 $|x_2-x_1|=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}$，则与选项矛盾，$B$ 错；

对于 C，$f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{12},\pi\right)$ 上单调递增且对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$，$\frac{T}{4}\geqslant\frac{\pi}{4}$，即 $T\geqslant\pi$，

则 $f(x)=\frac{5}{2}$ 在 $[0,2\pi)$ 两个周期内至多 4 个根，C 对.

对于 D，$g(x)=f\left(x-\frac{\varphi}{\omega}\right)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\varphi}{\omega}\right)+\varphi\right]+2=\sin(\omega x)+2$，

依题意 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 有两个极大值点，$\pi-\frac{\pi}{2}\geqslant T$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\omega\geqslant 4$，

又 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$，$\frac{\pi}{2}\omega\leqslant\omega x\leqslant\omega\pi$，则 $\begin{cases}2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}\omega\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \omega\pi\geqslant\frac{5\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$，；

赋值 k 可知 $\omega\in\left[\frac{9}{2},5\right]\cup\left[\frac{13}{2},+\infty\right)$，$D$ 对.故选 ACD.

三、填空题

13. 若 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 5 项为常数项，则该常数项为 (______) (用数字表示).

【答案】60

【解析】第 5 项是选 4 个 $\frac{1}{x}$，2 个 $2x^2$ 故 $n=6$，则 $T_5=C_6^4 2^2(-1)^4=15\times 4=60$.

14. 请写出一个与 x 轴和直线 $y=\sqrt{3}x$ 都相切的圆的方程 (______).

【答案】$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$(答案不唯一)

【解析】圆与 x 轴与 $y=\sqrt{3}x$ 都相切，圆心在 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，圆 $C:(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$.

15. 函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x(a\in\mathbf{R})$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 恒过定点，则该定点坐标为 (______).

【答案】$\left(\frac{1}{2},0\right)$

【解析】$f'(x)=(\ln x+1)-2ax+1$，$k=2-2a$ 又 $f(1)=-a+1$，

故切线：$y-(-a+1)=(2-2a)(x-1)$，即 $a(1-2x)+2x-1-y=0$，则定点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

16. 已知向量 $a_1=(1,1)$，$b_n=\left(\frac{1}{n},0\right)$，$a_n-a_{n+1}=(a_n\cdot b_{n+1})b_{n+1}(n\in N^*)$，则 $a_3\cdot b_4=$（______），$\frac{a_1\cdot b_3}{2}+\frac{a_2\cdot b_4}{3}+\cdots+\frac{a\cdot b_{n+2}}{n+1}=$（______）.

【答案】$\frac{1}{6}$；$\frac{3n^2+5n}{8(n+1)(n+2)}$

【解析】令 $\vec{a_n}=(x_n,y_n)$，$\vec{a_n}\cdot\overrightarrow{b_{n+1}}=\frac{x_n}{n+1}$，$(\vec{a_n}\cdot\overrightarrow{b_{n+1}})\cdot\overrightarrow{b_{n+1}}=\left(\frac{x}{(n+1)^2},0\right)$，

所以 $(x_n-x_{n+1},y_n-y_{n+1})=\left(\frac{x_n}{(n+1)^2},0\right)$，即 $x_n-x_{n+1}=\frac{x_n}{(n+1)^2}$，$\therefore\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$，

所以 $\frac{x_n}{x_1}=\frac{1\times2\times3\times(n-1)\times3\times4\times\cdots\times(n+1)}{2^2\times3^2\times\cdots\times n^2}=\frac{n+1}{2n}$，即 $x_n=\frac{n+1}{2n}$.

则 $\vec{a_3}=\left(\frac{2}{3},0\right)$，$\vec{b_4}=\left(\frac{1}{4},0\right)$，$\vec{a_3}\cdot\vec{b_4}=\frac{1}{6}$，

又 $\frac{\vec{a_n}\overrightarrow{b_{n+2}}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{1}{n+2}}{n+1}=\frac{1}{2n(n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

则 $\frac{\vec{a_1}\cdot\vec{b_3}}{2}+\frac{\vec{a_2}\cdot\vec{b_4}}{3}+\cdots+\frac{\vec{a_n}\cdot\overrightarrow{b_{n+2}}}{n+1}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3n^2+5n}{8(n+1)(n+2)}$.

四、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 $d\neq0$，a_3 是 a_1，a_{13} 的等比中项，$S_5=25$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-1$，$b_n+b_{n+1}=S_n$，求 b_{20}.

【解析】(1) 由 a_3 是 a_1，a_{13} 的等比中项，可得 $a_3^2=a_1\cdot a_{13}$，$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+12d)$，化简 $d=2a_1$，

由 $S_5=25$，可得 $5a_1+10d=25$，即 $a_1+2d=5$，解得 $a_1=1$，$d=2$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

(2)$S_n=\frac{1}{2}n(2n-1+1)=n^2$，$b_n+b_{n+1}=S_n=n^2$，①可得 $b_{n+1}+b_{n+2}=(n+1)^2$，②

②－①可得 $b_{n+2}-b_n=2n+1$，$b_1+b_2=1$，$b_1=-1$，得 $b_2=2$，

则 $b_{20}=b_2+(b_4-b_2)+(b_6-b_4)+\cdots+(b_{20}-b_{18})$

$=2+5+9+\cdots+37=2+\frac{1}{2}\times9\times(5+37)=191$.

18. 在① $a\cos B-b\cos A=c-b$，② $\tan A+\tan B+\tan C-\sqrt{3}\tan B\tan C=0$，③ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}a(b\sin B+c\sin C-a\sin A)$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且（______）.

(1) 求角 A；

(2) 若 $a=8$，$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】(1) 选择条件①：由正弦定理可得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C-\sin B$，

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

故 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，化简得 $2\sin B\cos A=\sin B$，

又 $B\in(0,\pi)$，故 $\sin B>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$．又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

选择条件②：因为 $\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，

所以 $\tan A(1-\tan B\tan C)=-(\tan B+\tan C)$，即 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，

所以 $\tan A\tan B\tan C=\sqrt{3}\tan B\tan C$，因为 $\tan B\tan C\neq 0$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

选择条件③：由题意 $\frac{1}{2}a(b\sin B+c\sin C-a\sin A)=\frac{1}{2}ab\sin C$，

由正弦定理可得，$b^2+c^2-a^2=bc$ ，

由余弦定理，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

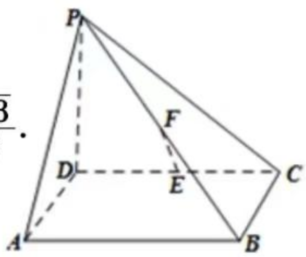
(2) 因为 ΔABC 的内切圆半径为 $\sqrt{3}$，

所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$，即 $b+c=\frac{1}{2}bc-8$．由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $64=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，得 $\left(\frac{1}{2}bc-8\right)^2-3bc=64$，即 $(bc)^2-44bc=0$，

所以 $bc=44$，所以 ΔABC 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=11\sqrt{3}$．

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，E，F 分别为 CD，PB 的中点，$AD=PD=2$，$AB=4$．



(1) 求证：EF // 平面 PAD；

(2) 在线段 AP 上求点 M，使得平面 MEF 与平面 AEF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【解析】(1) 取 AP 中点 G，连结 FG，DG．因为 F 为 PB 中点，

所以 FG 为 ΔPAB 的中位线，所以 FG // AB 且 $FG=\frac{1}{2}AB$，

又因为 DE // AB，且 $DE=\frac{1}{2}AB$，所以 FG // DE 且 $FG=DE$，故四边形 $DEFG$ 为平行四边形，

所以 EF // DG，又 $DG\subset$ 平面 PAD，且 $EF\not\subset$ 平面 PAD，所以 EF // 平面 PAD．

(2) 以 $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}\}$ 为正交基底，建立空间直角坐标系．则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,4,0)$，$E(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$F(1,2,1)$．$\overrightarrow{AE}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,1)$，

设平面 AEF 的一个法向量 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}-2x_1+2y_1=0,\\x_1+z_1=0,\end{cases}$ 取 $\overrightarrow{m}=(1,1,-1)$，

设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}=(-2,2,0)-(-2\lambda,0,2\lambda)=(2\lambda-2,2-2\lambda)$，

设平面 MEF 的一个法向量 $\overrightarrow{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}x_2+z_2=0,\\(2\lambda-2)x_2+2y_2-2\lambda z_2=0,\end{cases}$ 取 $\overrightarrow{n}=(1,1-2\lambda,-1)$．

由题意得 $|\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>|=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{|1+1-2\lambda+1|}{\sqrt{3}\sqrt{1+(1-2\lambda)^2+1}}=\frac{|3-2\lambda|}{\sqrt{3}\sqrt{(1-2\lambda)^2+2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $(3-2\lambda)^2=(1-2\lambda)^2+2$，求得 $\lambda=\frac{3}{4}$．

故 $AM=\frac{3}{4}AP$ 时，平面 MEF 与平面 AEF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

20. 体育比赛既是运动员展示个人实力的舞台，也是教练团队排兵布阵的战场. 在某团体比赛项目中，教练组想研究主力队员甲、乙对运动队得奖牌的贡献，根据以往的比赛数据得到如下统计：

	运动队赢得奖牌	运动队未得奖牌	总计
甲参加	40	b	70
甲未参加	c	40	f
总计	50	e	n

(1) 根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否认为该运动队赢得奖牌与甲参赛有关联？

(2) 根据以往比赛的数据统计，乙队员安排在 1 号，2 号，3 号三个位置出场比赛，且出场率分别为 0.3，0.5，0.2，同时运动队赢得奖牌的概率依次为：0.6，0.7，0.5. 则

①当乙队员参加比赛时，求该运动队比赛赢得奖牌的概率；

②当乙队员参加比赛时，在运动队赢得比赛奖牌的条件下，求乙在 2 号位置出场的概率.

附表及公式：

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

【解析】(1) 依题意，$b=30$，$c=10$，$\mathrm{e}=70$，$f=50$，$n=120$.

零假设为 H_0：运动队赢得奖牌与甲参赛无关，

则观测值 $\chi^2=\dfrac{120\times(40\times40-30\times10)^2}{70\times50\times70\times50}\approx16.56>10.828$.

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，

即认为该运动队赢得奖牌与甲参赛有关联，此推断犯错误的概率不超过 0.001.

(2) ①设 A_1 表示“乙在 1 号”；A_2 表示“乙在 2 号”；

A_3 表示“乙在 3 号”；B 表示“运动队比赛获得奖牌”，

有 $P(A_1)=0.3$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.2$，

$P(B\mid A_1)=0.6$，$P(B\mid A_2)=0.7$，$P(B\mid A_3)=0.5$.

$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$

$=0.3\times0.6+0.5\times0.7+0.2\times0.5=0.63$. 所以该运动队比赛赢得奖牌的概率是 0.63.

(2) 由①知的条件下，乙在 2 号位置出场的概率 $P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{0.5\times0.7}{0.63}=\dfrac{5}{9}$.

21. 已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F 和抛物线 C_2：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点重合，且 C_1 和 C_2 的一个公共点是 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

(1) 求 C_1 和 C_2 的方程；

(2) 过点 F 作直线 l 分别交椭圆于 A，B，交抛物线 C_2 于 P，Q，是否存在常数 λ，使 $\dfrac{1}{|AB|}-\dfrac{\lambda}{|PQ|}$ 为定值？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

【解析】(1) 将点 $\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 代入抛物线 C_2: $y^2=2px(p>0)$，得 $\frac{8}{3}=2p\cdot\frac{2}{3}$，解得 $p=2$，

所以抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4x$.

因为椭圆的右焦点和抛物线的焦点 (1,0) 重合，所以设椭圆 C_1: $\frac{x^2}{b^2+1}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

代入点 $\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，得 $\frac{4}{9(b^2+1)}+\frac{8}{3b^2}=1$，解得 $b^2=3$(舍去 $-\frac{8}{9}$)，

所以椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设直线 $l:x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x 得，$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}\\ y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4},\end{cases}$ $|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{6m}{3m^2+4}\right)^2-4\left(-\frac{9}{3m^2+4}\right)}=\frac{12m^2+12}{3m^2+4}$，

$|PQ|=(x_3+1)+(x_4+1)=m(y_3+y_4)+4=4m^2+4$，

所以，$\frac{1}{|AB|}-\frac{\lambda}{|PQ|}=\frac{3m^2+4}{12m^2+12}-\frac{\lambda}{4m^2+4}=\frac{3m^2+4-3\lambda}{12m^2+12}$，

要使上式为定值，则 $4-3\lambda=3$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，此时定值为 $\frac{1}{4}$.

22. 已知函数 $f(x)=a\ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x$，其中 a 为实数.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(2) 若 $0<a<1$，试判断关于 x 的方程 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上解的个数，并给出证明.

(参考数据：$\ln\pi\approx1.14$)

【解析】(1) 因为 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=\frac{a}{x+\frac{\pi}{4}}-\sin x\geqslant0$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立，

因为 $x+\frac{\pi}{4}>0$，所以 $a\geqslant\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立.

令 $\xi(x)=\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x$. 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right]$，$x+\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 且 $\sin x_n0$，则 $g(x)_n0$；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\xi'(x)=\sin x+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x>0$，所以 $\xi(x)$ 单调递增，

故 $\xi(x)<\xi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. 所以 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

(2) 由 $f(x)=\sin x$，得 $a\ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x-\sin x=0$，即 $a\ln\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

问题转化为判断函数 $g(t)$ 在 $(0,\pi)$ 上的零点个数.

$g'(t)=\frac{a}{t}-\sqrt{2}\sin t$,设 $h(t)=g'(t)$,则 $h'(t)=-\frac{a}{t^2}-\sqrt{2}\cos t$,

设 $\varphi(t)=h'(t)$,则 $\varphi'(t)=\frac{2a}{t^3}+\sqrt{2}\sin t$.

①当 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,因为 $0<a<1$,所以 $h'(t)<0$,故 $h(t)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,

即 $g'(t)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,

又 $g'(1)=a-\sqrt{2}\sin 1<a-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}<0$,$g'\left(\frac{a}{2}\right)=2-\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2}\right)>0$,

所以区间 $\left(\frac{a}{2},1\right)$ 上存在唯一实数 m_1,使得 $g'(m_1)=0$,

当 $t\in(0,m_1)$,$g'(t)>0$,所以 $g(t)$ 在 $(0,m_1)$ 内单调递增;

当 $t\in(m_1,1)$,$g'(t)<0$,所以 $g(t)$ 在 $(m_1,1)$ 上单调递减.

因为 $g(1)=\sqrt{2}\cos 1>0$,所以 $g(m_1)>0$,

又因为 $g\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}\right)=a\ln e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}+\sqrt{2}\cos e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}<a\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\sqrt{2}=0$,显然 $e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}<\frac{\pi}{2}$,故 $e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}<m_1$,

所以区间 $\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}},m_1\right)$ 上存在唯一实数 t_1,使得 $g(t_1)=0$,即 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 上有唯一零点 t_1.

②当 $t\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$,因为 $0<a<1$,所以 $g(t)>0$ 恒成立,即 $g(t)$ 在 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$ 上没有零点.

③当 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$,$\varphi'(t)=\frac{2a}{t^3}+\sqrt{2}\sin t>0$,所以 $\varphi(t)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增,

即 $h'(t)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,又 $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4a}{\pi^2}<0$,$h'(\pi)=-\frac{a}{\pi^2}+\sqrt{2}>0$,

所以区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上存在唯一实数 m_2,使得 $h'(m_2)=0$,

当 $t\in\left(\frac{\pi}{2},m_2\right)$,$h'(t)<0$,所以 $h(t)$ 单调递减;

当 $t\in(m_2,\pi)$,$h'(t)>0$,所以 $h(t)$ 单调递增.

又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2a}{\pi}-\sqrt{2}<0$,所以 $h(m_2)<0$,又 $h(\pi)=\frac{a}{\pi}>0$,

所以区间 (m_2,π) 上存在唯一实数 m_3,使得 $h(m_3)=0$,

当 $t\in\left(\frac{\pi}{2},m_3\right)$,$h(t)<0$,所以 $g(t)$ 单调递减;

当 $t\in(m_3,\pi)$,$h(t)>0$,所以 $g(t)$ 单调递增.

又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\ln\frac{\pi}{2}>0$,$g(\pi)=a\ln\pi-\sqrt{2}<\ln\pi-\sqrt{2}<0$,所以 $g(m_3)<0$,

所以区间 $\left(\frac{\pi}{2},m_3\right)$ 上存在唯一实数 t_2,使得 $g(t_2)=0$,即 $g(t)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上有唯一零点 t_2.

即方程 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上一共有 2 个解.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。