学校________ 密 班级________ 封 姓名________ 线 座号________

龙岩市2021年高中毕业班第三次教学质量检测

数 学 试 题

（满分：150分　考试时间：120分钟）

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

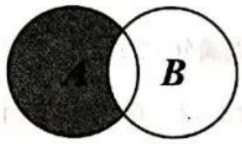
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$A=\{-1,0,1,2\}, B=\{x\mid 0<x<3\}$，则图中阴影部分表示的集合为

A. $\{-1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{-1,0\}$　　D. $\{0,1,2\}$



（第1题图）

2. 设$a=\log_3 5, b=\log_5 3, c=\log_4 2$，则

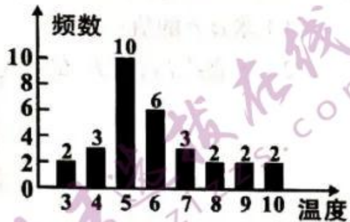
A. $a<c<b$　　B. $c<b<a$

C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

3. 平均数和中位数都描述了数据的集中趋势，它们的大小关系和数据的分布形态有关. 如图所示的统计图，记这组数据的众数为M，中位数为N，平均数为P，则

A. $N<M<P$　　B. $M<N<P$

C. $M<P<N$　　D. $P<N<M$



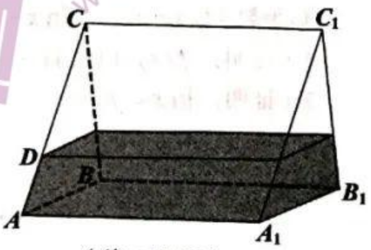
（第3题图）

4. $(x+y-2)^5$的展开式中，x^2y^2的系数为

A. -60　　B. -20　　C. 30　　D. 60

5. 如图，一个三棱柱的容器盛有水，水的体积是三棱柱体积的$\frac{1}{2}$，现将其侧面AA_1B_1B放置于水平地面，水面恰好经过底边AC上的点D，则$\frac{AD}{CD}$的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$



（第5题图）

6. 已知抛物线$x^2=4y$的焦点为F，准线为l，过抛物线上一点P作$PQ\perp l$，垂足为Q，若$|PF|=4$，则$\angle FQP=$

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $75°$

7. 在ΔABC中，角A,B,C的对边为a,b,c，则“$A=B$”成立的必要不充分条件为

A. $\sin A=\cos(B-\frac{\pi}{2})$　　B. $a\cos A-b\cos B=0$

C. $b\cos A=a\cos B$　　D. $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$

8. 若直线$y=kx+b$是曲线$y=e^{x-2}$的切线，也是曲线$y=e^x-1$的切线，则$k+b=$

A. $\frac{-\ln 2}{2}$　　B. $\frac{1-\ln 2}{2}$　　C. $\frac{\ln 2-1}{2}$　　D. $\frac{\ln 2}{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 下列命题中正确的是

A. $\left|\frac{2}{-1+i}\right|=\sqrt{2}$

B. 复数$(1-i)^3$的虚部是-2

C. 若复数$z=\frac{i}{1+i}$，则复数$\overline{z}$在复平面内对应的点位于第一象限

D. 满足$|z+3|-|z-3|=4$的复数z在复平面上对应点的轨迹是双曲线

10. 已知两个函数$f(x)=\tan\frac{x}{2}$和$g(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$，下列说法正确的是

A. 两个函数的定义域相同　　B. 两个函数都是奇函数

C. 两个函数的周期相同　　D. 两个函数的值域相同

11. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，则下列结论正确的是

A. 若数列$\{S_n\}$为等差数列，则数列$\{a_n\}$为等差数列

B. 若数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则数列$\{a_n\}$为等差数列

C. 若数列$\{a_n\}$和$\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$均为等差数列，则$S_3=2a_3$

D. 若数列$\{a_n\}$和$\{a_n^2\}$均为等差数列，则数列$\{a_n\}$是常数数列

12. 在意大利，有一座满是“斗笠”的灰白小镇阿尔贝罗贝洛(*Alberobello*)，这些圆锥形屋顶的奇特小屋名叫*Trullo*，于1996年被收入世界文化遗产名录．现测量一个*Trullo*的屋顶，得到圆锥SO（其中S为顶点，O为底面圆心），母线SA长为6米，C是母线SA的靠近点S的三等分点．从点A到点C绕屋顶侧面一周安装灯光带，若灯光带的最小长度为$2\sqrt{13}$米．下面说法正确的是

（第12题图）

A. 圆锥SO的侧面积为12π平方米

B. 过点S的平面截此圆锥所得截面面积最大值为18平方米

C. 圆锥SO的外接球表面积为72π平方米

D. 棱长为$\sqrt{3}$米的正四面体在圆锥SO内可以任意转动

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知$\vec{a},\vec{b}$是两个单位向量，且满足$\vec{a}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$，那么向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为________.

14. 在平面直角坐标系xOy中，已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，点$M$在$C$上且在第一象限内，$MF\perp OF$，$|MO|=\sqrt{13}|OF|$，则$C$的离心率为______.

15. 若函数$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}-m$有零点，则$m$的取值范围是________.

16. 有六个从左到右并排放置的盒子，现将若干个只有颜色不同的黑球、白球随机放入这六个盒子（每个盒子只能放入一个球），则事件“从左往右数，不管数到哪个盒子，总有黑球个数不少于白球个数”发生的概率为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_1=1$，且S_n是-1与a_{n+1}的等差中项.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）若$b_n=\log_3 a_{2n}$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

18.（本题满分 12 分）

ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$BC=4$，BC边上的中线$AD=4$.

（1）求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值；

（2）在①$A=\dfrac{\pi}{3}$；②$A=\dfrac{\pi}{6}$；③$A=\dfrac{\pi}{4}$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答.

问题：若______，则ΔABC是否存在？若存在，请求出ΔABC的面积；若不存在，请说明理由.

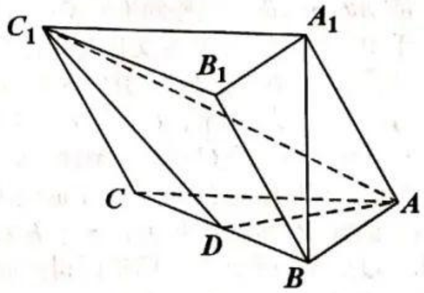
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（本题满分 12 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D为棱BC的中点，$AB\perp BC$，$BC\perp BB_1$，$AB=A_1B=BC=2$，$BB_1=2\sqrt{2}$.

（1）求证：$A_1B\perp$平面ABC；

（2）求二面角$D-AC_1-C$的余弦值.



（第 19 题图）

20.（本题满分 12 分）

甲、乙两人进行对抗比赛，每场比赛均能分出胜负．已知本次比赛的主办方提供 8000 元奖金并规定：①若有人先赢 4 场，则先赢 4 场者获得全部奖金同时比赛终止；②若无人先赢 4 场且比赛意外终止，则甲、乙便按照比赛继续进行各自赢得全部奖金的概率之比分配奖金．已知每场比赛甲赢的概率为 $p(0<p<1)$，乙赢的概率为 $1-p$，且每场比赛相互独立．

（1）设每场比赛甲赢的概率为 $\frac{1}{2}$，若比赛进行了 5 场，主办方决定颁发奖金，求甲获得奖金的分布列；

（2）规定：若随机事件发生的概率小于 0.05，则称该随机事件为小概率事件，我们可以认为该事件不可能发生，否则认为该事件有可能发生．若本次比赛 $p\geq\frac{4}{5}$，且在已进行的 3 场比赛中甲赢 2 场、乙赢 1 场，请判断：比赛继续进行乙赢得全部奖金是否有可能发生，并说明理由．

21.（本题满分 12 分）

已知 $a>b>0$，曲线 Γ 由曲线 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geq 0)$ 和曲线 C_2：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(y<0)$ 组成，其中曲线 C_1 的右焦点为 $F_1(2,0)$，曲线 C_2 的左焦点 $F_2(-6,0)$．

（1）求 a,b 的值；

（2）若直线 l 过点 F_2 交曲线 C_1 于点 A,B，求 ΔABF_1 面积的最大值．

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-\sin x-1$．

（1）证明：$f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 存在唯一极小值点；

（2）证明：$\ln x<f(x)$．

龙岩市2021年高中毕业班第三次教学质量检测

数学试题参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	C	B	B	A	D	C	B	D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

题号	9	10	11	12
选项	AB	BC	BCD	ACD

8．D 设曲线 $y=e^{x-2}$ 上的点 $P(x_1,y_1)$，$y'=e^{x-2}$，$k_1=e^{x_1-2}$；

曲线 $y=e^x-1$ 上的点 $Q(x_2,y_2)$，$y'=e^x$，$k_2=e^{x_2}$；

$\therefore l_1\quad y=e^{x_1-2}x+e^{x_1-2}-x_1e^{x_1-2}$，$\therefore l_2\quad y=e^{x_2}x+e^{x_2}-1-x_2e^{x_2}$

$\therefore\begin{cases}e^{x_1-2}=e^{x_2}\\e^{x_1-2}-x_1e^{x_1-2}=e^{x_2}-x_2e^{x_2}-1\end{cases}$，$\therefore x_2=-\ln 2$

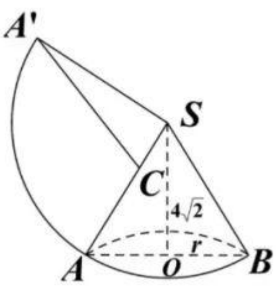
$\therefore k+b=e^{x_2}+e^{x_2}-1+x_2e^{x_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(-\ln 2)\frac{1}{2}=\frac{\ln 2}{2}$

12．略解：设圆锥底面半径为 r

如图，$\Delta A'SC$ 中，$A'S=6,SC=2,A'C=2\sqrt{13}$

$\therefore\cos\angle A'SC=-\frac{1}{2}\therefore\angle ASC=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\frac{2\pi r}{6}=\frac{2\pi}{3}\quad\therefore r=2\quad\therefore S_{侧面}=12\pi\quad\therefore$A正确



ΔASB 中，$\cos\angle ASB=\frac{SA^2+AB^2-AB^2}{2SA\cdot SB}=\frac{7}{9}$

$\therefore$过点 S 平面截此圆锥所得截面面积最大为 $S_{\Delta SAB}$

$\therefore S_{截\max}=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}\quad\therefore$B错误

设圆锥 SO 的内切球半径为 R ，则 $R^2=(h-R)^2+r^2$

即 $R^2=(4\sqrt{2}-R)^2+4$　　$\therefore R=3\sqrt{2}\ \therefore S_{表}=72\pi$　　$\therefore$C 正确

设圆锥 SO 的内切球半径为 t ，则 $\dfrac{t}{4\sqrt{2}-t}=\dfrac{1}{3}$　　$\therefore t=\sqrt{2}$

设棱长为 a 的正四面体的外接球是圆锥 SO 的内切球

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{2}a=2\sqrt{2}$　　$\therefore a=\dfrac{4}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}$　　$\therefore$D 正确

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\dfrac{\pi}{3}$　　14．$2+\sqrt{3}$　　15．$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　　16．$\dfrac{5}{16}$

16．简解：每个盒子都有两种可能，所以基本事件有 2^6 种。符合条件的基本事件有：

①六黑有一种：黑黑黑黑黑黑；

②五黑一白有 C_5^1 种：黑黑黑黑黑白，黑黑黑黑白黑，黑黑黑白黑黑，黑黑白黑黑黑，黑白黑黑黑黑；

③四黑二白有 $C_3^1+C_4^2$ 种：黑白黑白黑黑，黑白黑黑白黑，黑白黑黑黑白，黑黑白黑黑白，黑黑白黑白黑，黑黑白白黑黑，黑黑黑白白黑，黑黑黑白黑白，黑黑黑黑白白；

④三黑三白有 $C_2^1+C_3^1$ 种：黑黑黑白白白，黑黑白黑白白，黑白黑黑白白，黑白黑白黑白，黑黑白白黑白.

所以，事件“从左往右数，不管数到哪个盒子，总有黑球个数不少于白球个数”发生的概率为 $P=\dfrac{1+5+9+5}{2^6}=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17．（本题满分 10 分）

解：（1）$\because S_n$ 是 -1 与 a_{n+1} 的等差中项，$\therefore\ 2S_n=a_{n+1}-1$ ，........................1 分

所以当 $n\ge 2$ 时，由 $\therefore\ 2S_{n-1}=a_n-1$ 可得 $a_{n+1}=3a_n$ ，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3$ ....2 分

又因为当 $n=1$ 时，$2a_1=a_2-1\Rightarrow a_2=3$ ，....................3 分

因此 $\dfrac{a_2}{a_1}=3$ 满足上式，....................4 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，$\therefore\ a_n=3^{n-1}$ ....5 分

（2）$\because b_n=\log_3 a_{2n}$ ，$b_n=\log_3 3^{2n-1}=2n-1$ ，

$$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$ ……………………………………10 分

18.（本题满分 12 分）

解：（1）因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB})$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DB}^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=16-4=12$ ……………5 分

（2）因为 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，所以 $\frac{16+4-c^2}{16}+\frac{16+4-b^2}{16}=0$，

所以 $b^2+c^2=40$； ………………………………………………………7 分

选①当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$\because b^2+c^2=40\geq 2bc$，

$\therefore bc\leq 20$，当且仅当 $b=c=2\sqrt{5}$ 等号成立；

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得到 $b^2+c^2=bc+16$，

所以 $bc+16=40$, 解得 $bc=24$ 与 $bc\leq 20$ 矛盾，此时 ΔABC 不存在。…………….12 分

选②当 $A=\frac{\pi}{6}$，则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{6}$ 即 $16=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$，$\therefore bc=8\sqrt{3}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}bc=2\sqrt{3}$ ………………………………………………12 分

选③当 $A=\frac{\pi}{4}$，则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{4}$ 即 $16=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$，$\therefore bc=12\sqrt{2}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}bc=6$ ……………………………………………12 分

19.（本题满分 12 分）

证明：（1）$\because AB\perp BC$，$BC\perp BB_1$，$AB\cap BB_1=B$，AB，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1，

$\therefore BC\perp$ 平面 ABB_1，又 $A_1B\subset$ 平面 ABB_1，$\therefore A_1B\perp BC$，

又 $\because AB=A_1B=2$，$BB_1=2\sqrt{2}=AA_1$，得 $AA_1{}^2=AB^2+A_1B^2$，

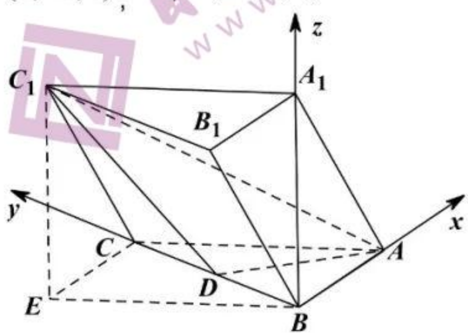
$\therefore A_1B\perp AB$，又 AB、$BC\subset$ 平面 ABC，$AB\cap BC=B$，

$\therefore A_1B\perp$ 平面 ABC； ………………………………………………6 分

（2）以 B 为原点，BA，BC，BA_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，过 B 作与直线 AC 平行的直线 BE，过 C 作与直线 AB 平行的直线 CE，两直线交于点 E.

由图可知 $B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(-2,2,0)$，$C_1(-2,2,2)$

$\therefore \overrightarrow{DA}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(-2,1,2)$，$CA=(2,-2,0)$，$CC_1=(-2,0,2)$



设平面 DAC_1 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}2x_1-y_1=0\\ -2x_1+y_1+2z_1=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}y_1=2x_1\\ z_1=0\end{cases}$，所以取 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,0)$

设平面 CAC_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}2x_2-2y_2=0\\ -2x_2+2z_2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_2=x_2\\ z_2=x_2\end{cases}$，所以取 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$

又 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(1,2,0)\cdot(1,1,1)=3$，$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{3}$，

设二面角 $D-AC_1-C$ 的平面角为 θ，则

$$\cos\theta=\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

所以二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………………………12 分

20.（本题满分 12 分）

解：（1）因为进行了 5 场比赛，所以甲、乙之间的输赢情况有以下四种情况：甲赢 4 场，乙赢 1 场；甲赢 3 场，乙赢 2 场；甲赢 2 场，乙赢 3 场；甲赢 1 场，乙赢 4 场．

5 场比赛不同的输赢情况有 $C_4^3+C_5^3+C_5^2+C_4^1$ 种，即 28 种．

①若甲赢 4 场，乙赢 1 场；甲获得全部奖金 8000 元；

②若甲赢 3 场，乙赢 2 场；当比赛继续下去甲赢得全部奖金的概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，所以甲分得 6000 元奖金；

③若甲赢 2 场，乙赢 3 场；当比赛继续下去甲赢得全部奖金的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以甲分得 2000 元奖金；

④ 甲 赢 1 场 ， 乙 赢 4 场 . 甲 没 有 获 得 奖

（2）由（1）知，曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1(y\ge 0)$，点 $F_2(-6,0)$，

设直线 l 的方程为：$x=my-6(m>0)$，

$\therefore$ 联立 $\begin{cases} x=my-6 \\ \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1 \end{cases}$ 得：$\left(5+4m^2\right)y^2-48my+64=0$，

$\therefore \Delta=(48m)^2-4\times 64\times\left(5+4m^2\right)>0 \Rightarrow m^2>1$，

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{48m}{5+4m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{64}{5+4m^2}$，……………………………………………7 分

$\therefore \left|y_1-y_2\right|=\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\dfrac{16\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2-1}}{5+4m^2}$，

$\therefore \Delta ABF_1$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}\left|F_1F_2\right|\left|y_1-y_2\right|=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{16\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2-1}}{5+4m^2}=64\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{5+4m^2}$，

令 $t=\sqrt{m^2-1}>0$，$\therefore m^2=t^2+1$，$\therefore S=\dfrac{64\sqrt{5}t}{4t^2+9}=\dfrac{64\sqrt{5}}{4t+\dfrac{9}{t}}\le\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$

当且仅当 $t=\dfrac{3}{2}$，即 $m=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ 时等号成立，所以 ΔABF_1 面积的最大值为 $\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$.

……………………………………………12 分

22.（本题满分 12 分）

解：（1）法一：证明: $f'(x)=e^x(x+1)-\cos x$，

当 $x\in(0,+\infty)$，则 $e^x>1$，$x+1>1$，$\therefore e^x(x+1)>1$，又因为 $\cos x\le 1$，

所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

当 $x\in(-1,0)$，$f'(x)=(x+1)(e^x-\dfrac{\cos x}{x+1})$，

令 $u(x)=\cos x-(x+1)$，$x\in(-1,0)$，

又因为 $u'(x)=-\sin x-1=-(\sin x+1)<0$，所以 $u(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，

所以 $u(x)>u(0)=0$，所以 $\cos x>x+1>0$，即 $\dfrac{\cos x}{x+1}>1$ 又因为 $e^x<1$，

所以 $f'(x)=(x+1)(e^x-\dfrac{\cos x}{x+1})<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减.

又因为 $f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 存在唯一极小值点……………………5 分

法二：证明：$f'(x)=(x+1)e^x-\cos x$

当 $x\in(-1,0)$ 时，$0<x+1<1,\frac{1}{e}<e^x<1,$

$\therefore (x+1)e^x<x+1$ ①

而 $g(x)=x+1-\cos x$

$\therefore g'(x)=1+\sin x>0$

$\therefore g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递增，

$\therefore g(x)<g(0)=0$

$\therefore x+1<\cos x$ ②

由①②得 $(x+1)e^x<\cos x,$

$\therefore f'(x)<0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$(x+1)e^x>1\ge\cos x,$

$\therefore f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

综上，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $f'(0)=0$.

故 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上存在唯一极小值点 $x=0$.

（2）因为 $\ln x<xe^x-\sin x-1\Leftrightarrow \sin x+\ln x+1-xe^x<0$，$(x>0)$ ①，

令 $L(x)=\sin x-x,(x>0)$，则 $L'(x)=\cos x-1\le 0$，所以 $L(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

所以 $L(x)<L(0)=0$，即当 $x>0,\sin x<x$.

要证①，只需证 $x+\ln x+1-xe^x\le 0$ ……………………………………………7 分

法一：令 $F(x)=x+\ln x+1-xe^x$，

$F'(x)=1+\frac{1}{x}-(x+1)e^x=\frac{x+1}{x}\left(1-xe^x\right)$，$(x>0)$

令 $m(x)=1-xe^x$，所以 $m'(x)=-(x+1)e^x<0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

又因为 $m(0)=1>0$，$m(1)=1-e<0$，

所以 $\exists x_0\in(-1,0)$，使 $m(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}=1$，$x_0+\ln x_0=0$，

所以当 $x\in\left(0,x_0\right)$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，

所以 $F(x)\le F\left(x_0\right)=x_0+\ln x_0+1-x_0e^{x_0}=0$，

所以原不等式得证 ……………………………………………12 分

法二：令 $\varphi(x)=e^x-x-1$，$\varphi'(x)=e^x-1$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增

$\therefore \varphi(x)\ge\varphi(0)=0\ \therefore e^x\ge x+1$，

$\because x+\ln x \in R$ ，

$\therefore e^{x+\ln x} \geq x+\ln x+1$ ，

$\therefore xe^{x} \geq x+\ln x+1$ ，即证 $x+\ln x+1-xe^{x} \leq 0$

$\therefore$原命题得证. ……………………………………………………12分