

2022 年高三校际联合考试

数学试题答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1—4BCAC

5—8DAAB

1. 【答案】B，解析： $z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i(1+i) = -1+i$ ，

因此，复数 z 在复平面内对应点的坐标为 $(-1, 1)$ ，故选 B。

2. 【答案】C，解析：

因为 $A = \{x | 2^x < 4\} = \{x | x < 2\}$ ， $B = \{x | (x-4)(x-1) < 0\} = \{x | 1 < x < 4\}$ ，

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | x \geq 2\} \cap \{x | 1 < x < 4\} = \{x | 2 \leq x < 4\}$ ，故选 C。

3. 【答案】A，解析：因为 $\frac{x+1}{x-5} < 2$ ， $\frac{x+1}{x-5} - 2 < 0$ ， $\frac{x-11}{x-5} > 0$ ，所以不等式 $\frac{x+1}{x-5} < 2$ 的解集为 $\{x | x > 11 \text{ 或 } x < 5\}$ ，故选 A。

4. 【答案】C，解析：记 $f(x) = \left(1 - \frac{2}{1+2^x}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2^x-1}{2^x+1} \cdot (-\sin x) = \frac{1-2^x}{2^x+1} \cdot \sin x$ ，

则 $f(-x) = \frac{1-2^{-x}}{2^{-x}+1} \cdot \sin(-x) = -\frac{2^x-1}{2^x+1} \cdot \sin x = \frac{1-2^x}{2^x+1} \cdot \sin x = f(x)$ ，

因此函数 $y = \left(1 - \frac{2}{1+2^x}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 是偶函数，故排除 AB；

当 $0 < x < \pi$ 时， $\frac{1-2^x}{2^x+1} < 0$ ， $\sin x > 0$ ，因此 $f(x) = \frac{1-2^x}{2^x+1} \cdot \sin x < 0$ ，排除 D；故选 C。

5. 【答案】D，解析： $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{OP}| \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OP} \rangle$ ，即 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的积。由图 2 知， O 点在直线 AB 上的射影是 AB 中点，由于 $AB=2$ ，圆弧直径是 2，半径为 1，所以 $\overrightarrow{OP}$ 向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影的最大值是 2，最小值是 -2，因此 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 的最大值是 $2 \times 2 = 4$ ，最小值是 $2 \times (-2) = -4$ ，因此其取值范围为 $[-4, 4]$ ，故选 D。

6. 【答案】A，解析：

解析：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q ，则 $\{|a_n|\}$ 也为等比数列，且 $|a_n| > 0$ ，

所以 $\lg|a_{n+1}| - \lg|a_n| = \lg \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lg|q|$ ，所以， $\{\lg|a_n|\}$ 为等差数列，

反之，若数列 $\{\lg|a_n|\}$ 为等差数列，例如 $a_n = \begin{cases} 1, 1 \leq n \leq 10, \\ -1, n \geq 11. \end{cases}$ 则 $|a_n| = 1$ ， $\lg|a_n| = 0$ ，

满足数列 $\{\lg|a_n|\}$ 为等差数列，但推不出“数列 $\{a_n\}$ 为等比数列”（ a_n 正负随取构不成等比数

列). 所以, “数列 $\{a_n\}$ 为等比数列” 是 “数列 $\{\lg|a_n|\}$ 为等差数列” 的充分不必要条件. 故选 A.

7. 【答案】A 解析: 因为 $a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = 3$, 所以 $\frac{a_{2022}}{k} + a_{2022} + ka_{2022} = 3$,

$$\text{所以 } a_{2022} = \frac{3}{\frac{1}{k} + 1 + k}, \quad a_{2021}^2 + a_{2022}^2 + a_{2023}^2 = a_{2022}^2 \left(\frac{1}{k^2} + 1 + k^2 \right) = \left(\frac{3}{\frac{1}{k} + 1 + k} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{k^2} + 1 + k^2 \right)$$

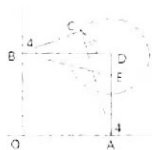
$$\text{令 } t = \frac{1}{k} + k (t \geq 2), \text{ 化简可得 } a_{2021}^2 + a_{2022}^2 + a_{2023}^2 = 9(t^2 - 1) \frac{1}{(t+1)^2},$$

$$\text{令 } f(t) = 9(t^2 - 1) \frac{1}{(t+1)^2} = 9 \left(1 - \frac{2}{t+1} \right) (t \geq 2), \text{ 所以 } f(t) \in [3, 9). \text{ 故选 A.}$$

8. 【答案】B, 解析: 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (4, 0)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0, 4)$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = (4, 4)$, $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = 2$,

即 C 在以 D (4, 4) 为圆心, 2 为半径的圆上, 如图, 取 E (4, 3), 则 $CD = 2DE = 2$, $AD = 2CD = 4$, 所以有 $\triangle DAC \sim \triangle DCE$, 所以 $AC = 2CE$, 又因为 $|\vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{BC}|$, $|\vec{a} - \vec{c}| = |\overrightarrow{AC}|$,

$$\text{所以 } |\vec{a} - \vec{c}| + 2|\vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{AC}| + 2|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{CE}| + 2|\overrightarrow{BC}| \geq 2BE = 2\sqrt{17}.$$



二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. ACD

10. BD

11. AD

12. ACD

9. 【答案】ACD 【解答】由题意得 $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, 可得 $\begin{cases} a_1 = 4, \\ d = -1 \end{cases}$,

则等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 5 - n$, 则选项 A 判断正确;

若 $a_m + a_n = a_2 + a_{10}$, 则 $m + n = 2 + 10 = 12$

$$\text{则 } \frac{1}{m} + \frac{16}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{16}{n} \right) \times \frac{m+n}{12} = \frac{1}{12} \left(17 + \frac{n}{m} + \frac{16m}{n} \right) \geq \frac{1}{12} (17 + 8) = \frac{25}{12}$$

(当且仅当 $m = \frac{12}{5}$, $n = \frac{48}{5}$ 时等号成立)

又 $m, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{16}{n}$ 的最小值不是 $\frac{25}{12}$. 则选项 B 判断错误;

等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4 > a_2 = 3 > a_3 = 2 > a_4 = 1 > a_5 = 0 > a_6 = -1 > \dots$

则等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取到最大值时, $n=4$ 或 $n=5$. 则选项 C 正确;

$$S_n = \frac{n(4+5-n)}{2} = \frac{n(9-n)}{2} > 0, \text{ 得 } 0 < n < 9 \text{ 则选项 D 判断正确故选: ACD}$$

10. 【答案】BD 【解答】解: 由函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象知, $\frac{1}{2}T = \frac{3\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\pi$,

所以 $T = \pi$; 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi)$, 由五点对应法, 得

$$2 \times \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \varphi = \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right), \text{ 选项 A 错误.}$$

当 $x = -\frac{5\pi}{8}$ 时, $2x + \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 的一条对称轴方程是 $x = -\frac{5\pi}{8}$, 选项 B 正确.

$$\text{令 } 2x + \frac{3\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}k\pi - \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z},$$

所以 $f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{1}{2}k\pi - \frac{3\pi}{8}, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, 选项 C 错误.

$$y = f\left(x + \frac{7\pi}{8}\right) = 3\sin\left(2x + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = 3\cos 2x,$$

是定义域 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以选项 D 正确.

11. 【答案】AD 【解答】 $a = e^{0.1} = e^{\frac{1}{10}}$, 令 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$b = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{10}\right), \text{ 令 } g(x) = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), c = 1 + \frac{1}{1+10}, \text{ 令 } h(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$$

当 $x > 0$ 时, $e^x > \frac{1}{x} + 1 > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 > 1 - \frac{1}{1+x} + 1 = \frac{1}{x+1} + 1$. 所以取 $x=10$, $a > b > c$.

12. 【答案】ACD 【详解】由 $f(x) = f(8-x) + f(4)$, 令 $x=4$, 得

$$f(4) = f(8-4) + f(4), f(4) = 0,$$

所以 $f(x) = f(8-x)$, $f(x)$ 关于直线 $x=4$ 对称. 由于 $f(x+\pi)$ 的图象关于点 $(-\pi, 0)$ 对称,

所以 $f(x)$ 的图象关于 $(0, 0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

所

以

$$f(x+16) = f(8 - (-8-x)) = f(-8-x) = -f(x+8) = -f(8-(-x)) = -f(-x) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 的周期为 16, A 选项正确.

$$f(2023) = f(126 \times 16 + 7) = f(7) = f(1) = 2022, \text{ B 选项不正确.}$$

结合上述分析可知, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=4+8k (k \in \mathbf{Z})$ 对称, 故 C 选项正确;

$f(x)$ 关于点 $(8k, 0) (k \in \mathbf{Z})$ 对称,

所以 $f(2x-1)$ 关于点 $\left(\frac{8k+1}{2}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$ 对称,

所以 $f(2x-1)+\pi$ 关于点 $\left(\frac{8k+1}{2}, \pi\right) (k \in \mathbf{Z})$ 对称,

令 $k=0$, 得 $f(2x-1)+\pi$ 关于点 $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$ 对称, D 选项正确. 故选: ACD

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

$$13. \frac{8}{5} \quad 14. 4 \quad 15. [-1, 2) \quad 16. \left\{ \alpha \mid \alpha = \pi \text{ 或 } \alpha \geq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$13. \text{【答案】} \frac{8}{5} \quad \text{【详解】因为 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin \theta = \frac{3}{5},$$

$$\text{由 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \text{ 得 } \cos \theta = \frac{4}{5},$$

$$\sin 2\theta + \cos^2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{8}{5}. \text{ 故答案为: } \frac{8}{5}.$$

$$14. \text{【答案】} 4 \quad \text{【详解】由已知条件及二次函数图像的轴对称性, 可得 } \frac{a+b}{2} = -\frac{a}{2}, \text{ 即}$$

$$2a+b=0, \text{ 所以 } f(2)=4+2a+b=4.$$

$$15. \text{【答案】} [-1, 2) \quad \text{解析: 当 } -2 < x \leq m \text{ 时, } f(x) = \log_4(x+2) \text{ 是增函数;}$$

$$\text{当 } x > m \text{ 时, } f(x) = 2^x - 3 \text{ 也是增函数, 所以当点 } (m, \log_4(m+2)) \text{ 在点 } (m, 2^m - 3) \text{ 上方时,}$$

$$\text{存在实数 } b, \text{ 使直线 } y=b \text{ 与曲线 } y=f(x) \text{ 有两个交点, 即存在实数 } b, \text{ 使得关于 } x \text{ 的方程 } f(x)=b$$

$$\text{有两个不同的实数根, 所以 } \log_4(m+2) > 2^m - 3 \text{ 即 } \log_4(m+2) > -2^m + 3 > 0, \text{ 令}$$

$$g(x) = \log_4(x+2) - 2^x + 3, \quad x \geq -1,$$

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{1}{(x+2)\ln 4} - 2^x \ln 2,$$

因为当 $x \geq -1$, 函数 $y = \frac{1}{(x+2)\ln 4}$ 单调递减, 函数 $y = 2^x$ 单调递增,

$$\text{所以当 } x \geq -1 \text{ 时, } g'(x) = \frac{1}{(x+2)\ln 4} - 2^x \ln 2 \text{ 单调递减,}$$

$$\text{又 } g'(-1) = \frac{1}{2\ln 2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - (\ln 2)^2}{2\ln 2} > 0, \quad g'(2) = \frac{1}{8\ln 2} - 4\ln 2 < 0,$$

所以存在 $x_0 \in (-1, 2)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

所以当 $x \in (-1, x_0)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$$\text{因为 } g(-1) = \log_4 1 - \frac{1}{2} + 3 > 0, \quad g(2) = \log_4 4 - 4 + 3 = 0, \text{ 所以当 } x \in [-1, 2] \text{ 时, } g(x) > 0,$$

故 m 的取值范围是 $[-1, 2)$, 故答案为: $[-1, 2)$

$$16. \text{【答案】} \left\{ \alpha \mid \alpha = \pi \text{ 或 } \alpha \geq \frac{3\pi}{2} \right\}$$

【解析】①当 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < 2\alpha \leq \pi$, $y = \cos x$ 为在 $[0, 2\alpha]$ 上为减函数, 所以 $M_{[0, \alpha]} = \cos \alpha$,

$M_{[\alpha, 2\alpha]} = \cos 2\alpha$, 得 $\cos \alpha = 1$ 或 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, 不合题意;

当 $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ 时, 有 $\pi < 2\alpha \leq 2\pi$, $M_{[0, \alpha]} = \cos \alpha$, $M_{[\alpha, 2\alpha]} = -1$, 得 $\alpha = \pi$;

当 $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, 有 $2\pi < 2\alpha < 3\pi$, $M_{[0, \alpha]} = -1$, $M_{[\alpha, 2\alpha]} > -1$, 不合题意;

当 $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi$ 时, 有 $3\pi \leq 2\alpha < 4\pi$, $M_{[0, \alpha]} = -1$, $M_{[\alpha, 2\alpha]} = -1$, 适合题意;

当 $\alpha \geq 2\pi$ 时, $[\alpha, 2\alpha]$ 的区间长度不小于 2π , 故 $M_{[0, \alpha]} = -1$, $M_{[\alpha, 2\alpha]} = -1$, 适合题意. 综上

正数 α 的取值范围为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \pi \text{ 或 } \alpha \geq \frac{3\pi}{2} \right\}$.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

$$17. \text{解: (1) 因为 } \vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0, \text{ 所以 } \left(\vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{BC} \right) \cdot \vec{AC} = 0,$$

$$\text{即} \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

$$\text{所以} \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} bc \cos A + \frac{1}{3} b^2 = 0,$$

$$\text{因为 } b=c, \text{ 所以 } \cos A = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} bc \cos A + \frac{1}{3} b^2 = 0$$

$$\text{由余弦定理得, } \frac{2}{3} bc \cos A + \frac{1}{3} b^2 = \frac{2}{3} bc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{1}{3} b^2 = 0$$

$$\text{即 } 2b^2 + c^2 - a^2 = 0,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \frac{a^2 + c^2 - a^2 - c^2}{2}}{2ac} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{3c^2}{2}}{2ac} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{a^2}{2} = \frac{3c^2}{2} \text{ 时, 即 } a = \sqrt{3}c \text{ 时, 取等号.}$$

$$\text{因为 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B \text{ 的最大值为 } \frac{\pi}{6}.$$

$$18. \text{ 解: (1) 由题意可知, } \{a_n\} \text{ 满足 } a_1 = 0, a_2 = 3, a_4 = 9,$$

$$\text{则公差 } d = a_2 - a_1 = 3, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 3(n-1) = 3n-3;$$

$$\{a_n\} \text{ 的前 5 项为 } 0, 3, 6, 9, 12, \text{ 所以数列 } \{b_n\} \text{ 的前三项为 } 3, 6, 12,$$

$$\text{所以公比 } q = \frac{b_2}{b_1} = 2, b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$(2) c_n = \frac{a_n b_n}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{(3n-3) \times 3 \cdot 2^{n-1}}{3n(3n+3)} = \frac{2^n}{n+1} - \frac{2^{n-1}}{n},$$

$$T_n = \left(\frac{2^1}{2} - \frac{2^0}{1} \right) + \left(\frac{2^2}{3} - \frac{2^1}{2} \right) + \left(\frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{2^n}{n+1} - \frac{2^{n-1}}{n} \right) = \frac{2^n}{n+1} - 1,$$

$$\text{所以数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{2^n}{n+1} - 1.$$

19. 解: (1)

因为 $f(x) = [ax^2 - (3a+2)x + 3a+4]e^x$, 所以 $f'(x) = [ax^2 - (a+2)x + 2]e^x$,

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 0, 所以 $f'(2) = (4a - 2a - 4 + 2)e^2 = 0$,

解得 $a=1$;

$$(2) f'(x) = [ax^2 - (a+2)x + 2]e^x = (x-1)(ax-2)e^x,$$

①若 $a=0$, 则 $x<1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增; $x>1$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 故

在 $x=1$ 处 $f(x)$ 取得极大值, 不符合题意;

②若 $a=2$, 则 $f'(x) = 2(x-1)^2 e^x \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, 无极值, 不符合题意;

③若 $a>2$, 则 $\frac{2}{a}<1$,

当 $x < \frac{2}{a}$ 或 $x>1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $\frac{2}{a} < x < 1$ 时, $f'(x)<0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{2}{a})$ 单调递增; 在 $(\frac{2}{a}, 1)$ 单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 符合题意;

④若 $0<a<2$, 则 $\frac{2}{a}>1$,

当 $x<1$ 或 $x>\frac{2}{a}$ 时, $f'(x)>0$; 当 $1 < x < \frac{2}{a}$ 时, $f'(x)<0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增; 在 $(1, \frac{2}{a})$ 单调递减; 在 $(\frac{2}{a}, +\infty)$ 单调递增,

可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 不符合题意;

⑤若 $a<0$, 则 $\frac{2}{a}<1$,

当 $x < \frac{2}{a}$ 或 $x>1$ 时, $f'(x)<0$; 当 $\frac{2}{a} < x < 1$ 时, $f'(x)>0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{2}{a})$ 单调递减; 在 $(\frac{2}{a}, 1)$ 单调递增; 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 不符合题意;

综上可得, a 的范围是 $(2, +\infty)$

20. 解: (1) 设数列 $\{x_n\}$ 的公比为 q , 由已知 $q>0$.

$$\text{由题意得} \begin{cases} x_1 + x_1 q = 3 \\ x_1 q^2 - x_1 q = 2 \end{cases}, \text{ 所以 } 3q^2 - 5q - 2 = 0,$$

因为 $q > 0$, 所以 $q = 2$, $x_1 = 1$,

因此数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n = 2^{n-1}$.

(2) 过 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ 分别向 x 轴作垂线, 垂足分别为 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$,

由 (1) 得 $x_{n+1} - x_n = 2^{n-1}$

记梯形 $P_n P_{n+1} Q_{n+1} Q_n$ 的面积为 b_n .

$$\text{由题意 } b_n = \frac{(n+n+1)}{2} \times 2^{n-1} = (2n+1) \times 2^{n-2},$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$= 3 \times 2^{-1} + 5 \times 2^0 + 7 \times 2^1 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-3} + (2n-1) \times 2^{n-2} \text{ ①}$$

$$\text{又 } 2T_n = 3 \times 2^0 + 5 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-2} + (2n-1) \times 2^{n-1} \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } -T_n = 3 \times 2^{-1} + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n+1) \times 2^{n-1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n+1) \times 2^{n-1}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(2n-1) \times 2^n + 1}{2}.$$

$$21. \text{解: (1) 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理, } \cos A = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2AD \cdot AB} = \frac{40^2 + 30^2 - 100 \times 37}{2 \times 40 \times 30} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{故 } A = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\text{又由正弦定理有 } \frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{AD}{\sin \angle ABD}, \text{ 故 } \sin \angle ABD = \frac{AD}{BD} \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}, \text{ 所以扇形的半径}$$

$$r = AB \cdot \sin \angle ABD = 30 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{37}}, \text{ 故活动区域的面积}$$

$$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{37}} \right)^2 = \frac{7200\pi}{37}$$

$$(2) \text{ 设 } \angle BDA = \theta, \text{ 则 } \angle ABD = \pi - \frac{3}{4}\pi - \theta = \frac{1}{4}\pi - \theta.$$

$$\text{故 } AD = \frac{10}{\sin \theta}, \quad AB = \frac{10}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)},$$

故平行四边形 $ABCD$ 面积

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{\sin \theta} \cdot \frac{10}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{100}{\sin \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta - \sin \theta)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{100}{\sin \theta \cdot \cos \theta - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{200}{\sin 2\theta + \cos 2\theta - 1} = \frac{200}{\sqrt{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1}, \end{aligned}$$

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 当 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 即 $2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{8}$ 时, 即 $\angle BDA = \frac{\pi}{8}$ 时, 平行四

边形区域 $ABCD$ 面积最小.

22. 解: (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (a+1)x + a \ln x (x > 0)$, 所以

$$f'(x) = x + (a+1) + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x} = \frac{(x+a)(x+1)}{x},$$

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < -a$; 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > -a$;

所以 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增,

综上: 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间 $(0, +\infty)$;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, -a)$, 单调递增区间为 $(-a, +\infty)$.

(1) 法一: 由 $f(x) - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0$, 得 $x + a \ln x = 0$, 即 $a = -\frac{x}{\ln x}$,

此时方程 $f(x) - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0$ 的根的个数

等价于直线 $y = a$ 与函数 $y = -\frac{x}{\ln x}$ 图像交点个数,

令 $g(x) = -\frac{x}{\ln x}$, $x = 1$ 是函数 $g(x)$ 渐近线, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{(\ln x)^2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 且 $g(x) > 0$,

当 $x > 1$ 时, $g(x) < 0$,

$1 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

故 $x = e$ 时, $g(x)$ 取得极大值, 且 $g(e) = -e$, $x \rightarrow +1$, $g(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow -\infty$,

故当 $a < -e$ 时, 直线 $y = a$ 与函数 $y = g(x)$ 图像有两个交点,

此时方程 $f(x) - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0$ 有两个解,

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -e)$.

法二: 由 $f(x) - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0$ 得 $x + a \ln x = 0$, 即 $x + a \ln x = 0$ 有两个解 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),

令 $g(x) = x + a \ln x$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = 1 + \frac{a}{x} = \frac{x+a}{x}$, 且 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上两个零点,

当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) = \frac{x+a}{x} > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至多有一个零点, 不满足题意;

当 $a < 0$ 时, 令 $g'(x) > 0$, 得 $x > -a$; 令 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < -a$;

所以 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增, 即 $g(x)$ 的极小值为 $g(-a)$,

为使 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, 则 $g(-a) < 0$, 即 $-a + a \ln(-a) < 0$, 解得 $a < -e$,

当 $0 < x < -a$ 时, 易知 $-a > e$, 因为 $g(1) = 1 > 0$, 故 $g(1)g(-a) < 0$,

又 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 所以 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 有唯一零点;

当 $x > -a$ 时,

令 $\varphi(x) = e^x - x^2$ ($x > 1$), 则 $\varphi'(x) = e^x - 2x$,

再令 $u(x) = e^x - 2x$ ($x > 1$), 则 $u'(x) = e^x - 2 > e^1 - 2 > 0$, 故 $u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $u(x) > u(1) = e - 2 > 0$, 即 $\varphi'(x) > 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x) > \varphi(1) = e - 1 > 0$, 因为 $-a > e > 1$,

所以 $\varphi(-a) > 0$, 即 $e^{-a} - (-a)^2 > 0$, 即 $e^{-a} - a^2 > 0$,

所以 $g(e^{-a}) = e^{-a} + a \ln e^{-a} = e^{-a} - a^2 > 0$, 故 $g(-a)g(e^{-a}) < 0$,

又 $g(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 有唯一零点;

综上：当 $a < -e$ 时， $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上两个零点，即 $f(x) - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0$ 有两个解

$x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 时， $a < -e$ ，实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -e)$ 。

$$(II) \text{ 由题意知, } \begin{cases} x_1 + a \ln x_1 = 0 \\ x_2 + a \ln x_2 = 0 \end{cases}, \text{ 故 } a = -\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1},$$

又 $f'(s) > 0$ ，所以 $\frac{(s+a)(s+1)}{s} > 0$ ，即 $s > -a$ ，即 $\lambda(x_1 + x_2) > \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$ ，故

$$\lambda > \frac{\frac{x_2 - x_1}{(\ln x_2 - \ln x_1)(x_1 + x_2)}}{\frac{x_2 - 1}{\ln x_1 \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)}},$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1} (t > 1)$ ，则 $\lambda > \frac{t-1}{(1+t)\ln t}$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上恒成立，

$\lambda \ln t > \frac{t-1}{1+t}$ ，即 $\lambda \ln t - 1 + \frac{2}{1+t} > 0$ ，令 $h(t) = \lambda \ln t - 1 + \frac{2}{1+t}$ ， $t \in (1, +\infty)$ ， $h(1) = 0$ ，

$$h'(t) = \frac{\lambda}{t} - \frac{2}{(1+t)^2}, \quad h'(1) = \lambda - \frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } \lambda \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } h'(t) = \frac{\lambda}{t} - \frac{2}{(1+t)^2} \geq \frac{1}{2t} - \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2 - 4t}{2t(1+t)^2} = \frac{(t-1)^2}{2t(1+t)^2} \geq 0,$$

所以 $h(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，

所以当 $t > 1$ 时， $h(t) > h(1) = 0$ ，适合题意；

当 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ 时， $h'(1) = \lambda - \frac{1}{2} < 0$ ，因为 $h'(t)$ 的图像连续，故 $\exists t_0 > 1$ ，使 $t \in [1, t_0)$ 时， $h'(t) < 0$ ，

所以函数 $h(t)$ 在 $[1, t_0)$ 上单调递减，所以当 $t \in (1, t_0)$ 时， $h(t) < h(1) = 0$ ，不适合题意；

综上： $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ，即 $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线