

姓 名 _____
准考证号 _____

2023 届高三全真模拟适应性考试 数学试题

本试卷共 6 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\}$, 集合 $B = \{x | y = \ln(x+1)\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(-1, 3)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, +\infty)$
2. 已知复数 z 满足 $\bar{z}(3-i) = |i(\sqrt{3}-i)|$, 则 $z =$
A. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ B. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$
C. $\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$ D. $-\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$
3. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的常数项是
A. -20 B. 20 C. -160 D. 160
4. 两千多年前, 我国首部数学专著《九章算术》是数学的瑰宝, 世人惊叹祖先的智慧. 其中早就提出了宛田(扇形面积)的计算方法: “以径乘周, 四而一”(意思是说直径与弧长乘积的四分之一), 已知扇形 AOB 的圆心角为 α ($0 < \alpha < \pi$), 弧长为 4π , 且 $|\vec{OA} - 2\vec{OB}| = \sqrt{3}|\vec{AB}|$, 则它的面积为
A. 24π B. 12π C. 48π D. 32π

数学试题 第 1 页 (共 6 页)



5. 我国是一个人口大国,产粮、储粮是关系国计民生的大事.现某储粮机构拟在长 100 米,宽 80 米的长方形地面建立两座完全相同的粮仓(设计要求:顶部为圆锥形,底部为圆柱形,圆锥高与底面直径为 1:10,粮仓高为 50 米,两座粮仓连体紧靠矩形一边),已知稻谷容重为 600 千克每立方米,粮仓厚度忽略不计,估算两个粮仓最多能储存稻谷(π 取近似值 3)
- A. 105 000 吨 B. 68 160 吨 C. 157 000 吨 D. 146 500 吨
6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的一条对称轴为 $x = \frac{2}{3}\pi$, 一个对称中心为 $(\frac{\pi}{2}, 0)$. 则当 ω 取最小整数时,函数 $f(x)$ 在 $(0, 5)$ 内极值点的个数为
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作直线 l 与椭圆相交于 M, N 两点, $\angle MF_2N = 90^\circ$, 且 $4|F_2N| = 3|F_2M|$, 则椭圆的离心率为
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
8. 若曲线 $f(x) = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 与 $g(x) = e^x$ 有三条公切线, 则 k 的取值范围为
- A. $(-\frac{1}{e}, 0)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{e})$
C. $(-\frac{2}{e}, 0)$ D. $(-\infty, -\frac{2}{e})$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 为线段 BC_1 的中点,则
- A. 异面直线 BD_1 与 CC_1 所成角为 45°
B. $DP \parallel$ 面 AB_1D_1
C. $DP \perp AD_1$
D. 点 P 到平面 BB_1D_1D 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = 2x - \cos \frac{\pi}{2}x$, 则
- A. $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上最大值为 2
 B. $f(x)$ 有两个零点
 C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称
 D. 存在实数 a , 使 $f(2x-a)$ 的图象关于原点对称
11. 已知抛物线 $C: y = ax^2$ 的顶点为 O , 准线为 $y = -\frac{1}{2}$, 焦点为 F , 过 F 作直线 l 交抛物线于 M, N 两点 (M, N 顺序从左向右), 则
- A. $a = \frac{1}{2}$
 B. 若直线 l 经过点 $(-1, 0)$, 则 $|MN| = \frac{5}{2}$
 C. $|OM| \cdot |ON|$ 的最小值为 1
 D. 若 $\overrightarrow{FN} = 3\overrightarrow{MF}$, 则直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
12. 已知 a, b 是方程 $e^x = x^3$ 的两根 ($a < b$), $c^c = d^d = e^{-\frac{2}{e}}$ ($0 < c < d$), e 为无理数, 则
- A. $\frac{c+d}{2} > \frac{1}{e}$
 B. $a+b > 5$
 C. $ad-1 < 0$
 D. $bc-1 < 0$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 小张、小李参加满分为 50 分 (只取整数) 的岗上技能测试, 小张的六次成绩从小到大分别为 27, 32, 39, m , 46, 47; 小李的六次成绩从小到大分别为 30, 31, 34, 41, 42, 45. 只知小张的六次成绩的第 50 百分位数等于小李的六次成绩的第 80 百分位数, 则 $m =$ _____.
14. 已知公共点为 M, N 的圆 C_1 和圆 C_2 均与 x 轴相切, 且与直线 $y = 2\sqrt{2}x$ 均相切于第一象限, 两圆的半径之和为 4, 则直线 MN 的方程为 _____.
15. 若 $x=1$ 是函数 $f(x) = e^x(ax^2 + bx - 1)$ ($a \leq 0$) 的极小值点, 则 a 的取值范围为 _____.
16. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD = BC = 2$, 沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使平面 $ADB \perp$ 平面 BDC , 得到三棱锥 $A-BCD$, 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积的最小值为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\sqrt{3}b + c\cos\left(\frac{\pi}{2} + B\right) = b\sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right)$ 。

(1) 求角 C ；

(2) 已知边 AB 的中点为 D ，且 $CD=1$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

18. (本小题满分 12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ， $a_1=2$ ，且对任意 $n \geq 2$ ， $a_n T_n, a_1, a_n T_{n-1}$ 成等差数列，又正项等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_2 = \frac{4}{3}$ ， $S_3 = \frac{13}{9}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

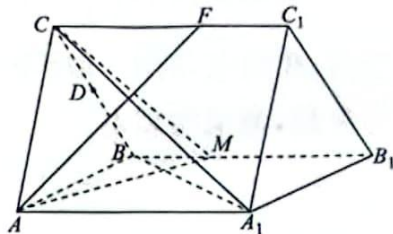
(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = T_n^2 \cdot b_n$ ，是否存在正整数 n ，使 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n > 9$ 。若存在，求出 n 的最大值；若不存在，请说明理由。

19. (本小题满分 12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC$, $BC=2$, $AA_1=3$, D 是棱 BC 的中点, 棱 CC_1 上的点 F 满足 $CF=2$, 棱 BB_1 上的点 M 满足 $BM=1$.

(1) 证明: $CM \perp AF$;

(2) 若 AC 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 60° , 求平面 CAM 与平面 CBA_1 所成锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

某区在高中阶段举行的物理实验技能操作竞赛分基本操作与技能操作两步进行, 第一步基本操作: 每位参赛选手从 A 类 7 道题中任选 4 题进行操作, 操作完后正确操作超过两题的 (否则终止比赛), 才能进行第二步技能操作: 从 B 类 5 道题中任选 3 题进行操作, 直至操作完为止. A 类题操作正确得 10 分, B 类题操作正确得 20 分. 以两步总分和决定优胜者. 总分 80 分或 90 分为二等奖, 100 分为一等奖. 某校选手李明 A 类 7 题中有 5 题会操作, B 类 5 题中每题正确操作的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且各题操作互不影响.

(1) 求李明被终止比赛的概率;

(2) 现已知李明 A 类题全部操作正确, 求李明 B 类题操作完后得分的分布列及期望;

(3) 求李明获二等奖的概率.



21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 且经过点 $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(1) 求双曲线 C 的离心率及方程;

(2) 已知点 $M(\frac{13}{4}, 0)$, 点 $N(t, 0) (|t| < 2)$, 过点 N 的直线 l 与双曲线交于 A, B 两点, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 是否为常数? 若为常数, 求出此常数及 t 的值; 若不为常数, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x + \ln x, g(x) = e^x$.

(1) 求函数 $H(x) = f(x) - xg(x)$ 的最大值;

(2) 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, 证明: $\frac{2xg(x-1)}{f(x) - (x-1)} \geq x^2 + 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线