

2023 年湖北省七市(州)高三年级 3 月联合统一调研测试

数 学

宜昌市教育科学研究院 命制

本试卷共 4 页,22 小题,满分 150 分。考试用时 120 分钟。

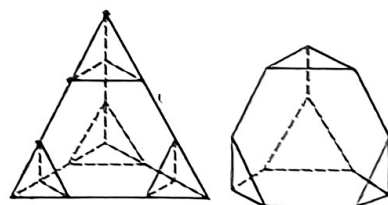
★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 若 $z(1+i) = 3z - i$, 则 $|z| =$
 A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$
3. 一组数据按照从小到大的顺序排列为 1, 2, 3, 5, 6, 8, 记这组数据的上四分位数为 n , 则二项式 $(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 展开式的常数项为
 A. -160 B. 60 C. 120 D. 240
4. 截角四面体是一种半正八面体, 可由四面体经过适当的截角而得到. 如图, 将棱长为 6 的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面截角得到所有棱长均为 2 的截角四面体, 则该截角四面体的体积为
 A. $6\sqrt{2}$ B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{46\sqrt{2}}{3}$ D. $16\sqrt{2}$



5. 已知 $\cos(75^\circ + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(30^\circ - \alpha)$ 的值为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

6. 已知 $m > 0, n > 0$, 直线 $y = \frac{1}{e}x + m + 1$ 与曲线 $y = \ln x - n + 2$ 相切, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值是

- A. 16 B. 12 C. 8 D. 4

7. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于 A, B 两点, 点 C 在 x 轴上, $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{F_2A}$, BF_2 平分 $\angle F_1BC$, 则双曲线 Γ 的离心率为

- A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \log_3(3^{x-1} + 3) - \frac{1}{2}x$, 若 $f(a-1) \geq f(2a+1)$ 成立, 则实数 a 的取值范围为

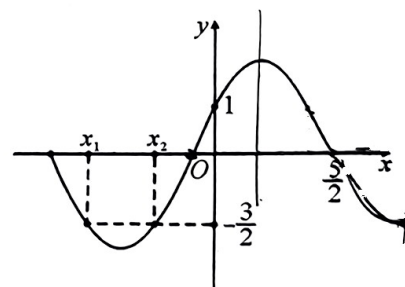
- A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$
 C. $[-2, \frac{4}{3}]$ D. $(-\infty, -2] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列命题中正确的是

- A. 若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{20} 的样本方差为 3, 则数据 $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_{20} + 1$ 的方差为 7
 B. 经验回归方程为 $\hat{y} = 0.3 - 0.7x$ 时, 变量 x 和 y 负相关
 C. 对于随机事件 A 与 $B, P(A) > 0, P(B) > 0$, 若 $P(A|B) = P(A)$, 则事件 A 与 B 相互独立
 D. 若 $X \sim B(7, \frac{1}{2})$, 则 $P(X=k)$ 取最大值时 $k=4$

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图



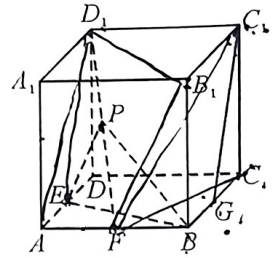
所示, $f(x_1) = f(x_2) = -\frac{3}{2}$, 则

- A. 函数 $y = f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递减
 B. 函数 $y = f(x)$ 在 $[3, 6]$ 上的值域为 $[-1, 1]$

C. $\cos[\frac{\pi}{6}(x_2 - x_1)] = \frac{3}{4}$

D. 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线斜率为 $\sqrt{3}$

11. 如图, 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 AD, AB, BC 的中点, 点 P 为线段 D_1F 上的动点, 则



- A. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 45°
- B. 存在点 P , 使得 $C_1G \parallel$ 平面 BEP
- C. 对任意点 P , 平面 $FCC_1 \perp$ 平面 BEP
- D. 点 B_1 到直线 D_1F 的距离为 4

12. 已知直线 $l: y=k(x+2)$ 交 y 轴于点 P , 圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 过点 P 作圆 M 的两条切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 与 MP 交于点 C , 则

- A. 若直线 l 与圆 M 相切, 则 $k = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$
- B. 当 $k=2$ 时, 四边形 $PAMB$ 的面积为 $2\sqrt{19}$
- C. 直线 AB 经过一定点
- D. 已知点 $Q(\frac{7}{4}, 0)$, 则 $|CQ|$ 为定值

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 已知 $a=(4, 2), b=(1, 1)$, 则 a 在 b 方向上的投影向量的坐标为 _____。

14. 现有甲、乙两个口袋, 其中甲口袋内装有三个 1 号球, 两个 2 号球和一个 3 号球; 乙口袋内装有两个 1 号球, 一个 2 号球, 一个 3 号球。第一次从甲口袋中任取 1 个球, 将取出的球放入乙口袋中, 第二次从乙口袋中任取一个球, 则第二次取到 2 号球的概率为 _____。

15. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - ax^2, & x > 0, \\ -x^3 + (a-2)x + 2a, & x \leq 0, \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, +\infty)$,

则实数 a 的取值范围为 _____。

16. 已知 $M(1, 2)$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, 过点 $T(0, 1)$ 的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点, 且直线 MA 与 MB 的倾斜角互补, 则 $|TA| \cdot |TB| =$ _____。

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2b \cos C = 2a + c$.

(1) 求 B ;

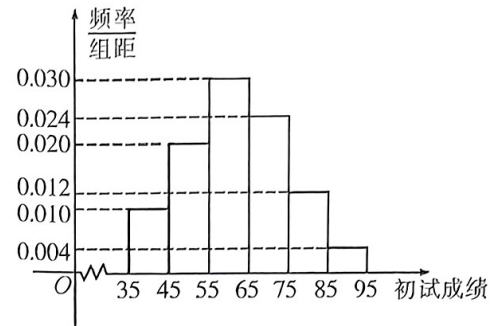
(2) 设 $b=9$, 若点 M 是边 AC 上一点, $2\vec{AM} = \vec{MC}$, 且 $\angle MAB = \angle MBA$, 求 $\triangle BMC$ 的面积。

18. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1, 2na_n - 2S_n = n^2 - n, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n = 2^n - 1$, 令 $c_n = \frac{a_n^2}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

19. (12分)某市举行招聘考试,共有4000人参加,分为初试和复试,初试通过后参加复试.为了解考生的考试情况,随机抽取了100名考生的初试成绩,并以此为样本绘制了样本频率分布直方图,如图所示.



(1)根据频率分布直方图,试求样本平均数的估计值;

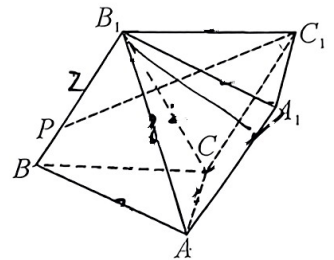
(2)若所有考生的初试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,其中 μ 为样本平均数的估计值, $\sigma \approx 13$,试估计初试成绩不低于88分的人数;

(3)复试共三道题,第一题考生答对得5分,答错得0分,后两题考生每答对一道题得10分,答错得0分,答完三

道题后的得分之和为考生的复试成绩.已知某考生进入复试,他在复试中第一题答对的概率为 $\frac{3}{4}$,后两题答对的概率均为 $\frac{3}{5}$,且每道题回答正确与否互不影响.记该考生的复试成绩为 Y ,求 Y 的分布列及均值.

附:若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则: $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$,
 $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

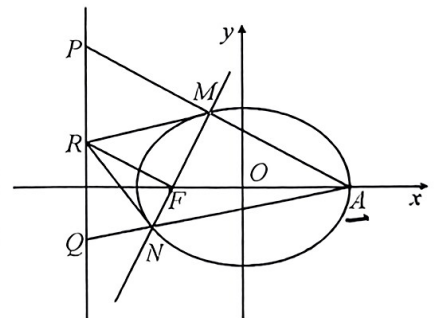
20. (12分)如图,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形,侧面 BCC_1B_1 为菱形,已知 $\angle BB_1C = 60^\circ$, $AB_1 = a$.



(1)当 $a = \sqrt{6}$ 时,求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积;

(2)设点 P 为侧棱 BB_1 上一动点,当 $a = 3$ 时,求直线 PC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值的取值范围.

21. (12分)已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的右顶点为 A ,左焦点为 F ,过点 F 作斜率不为零的直线 l 交椭圆于 M, N 两点,连接 AM, AN 分别交直线 $x = -\frac{9}{2}$ 于 P, Q 两点,过点 F 且垂直于 MN 的直线交直线 $x = -\frac{9}{2}$ 于点 R .



(1)求证:点 R 为线段 PQ 的中点;

(2)记 $\triangle MPR, \triangle MRN, \triangle NRQ$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ,试探究:是否存在实数 λ 使得 $\lambda S_2 = S_1 + S_3$? 若存在,请求出实数 λ 的值;若不存在,请说明理由.

22. (12分)已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{x-1}{x+1}$.

(1)当 $a = 1$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $g(x) = a(x^2 - 1) \ln x - (x-1)^2 (a \neq 0)$ 有3个零点 x_1, x_2, x_3 ,其中 $x_1 < x_2 < x_3$.

(i)求实数 a 的取值范围;

(ii)求证: $(3a-1)(x_1 + x_3 + 2) < 2$.