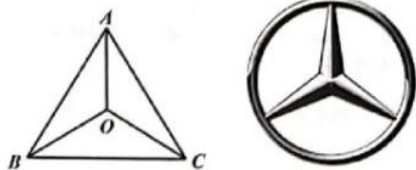
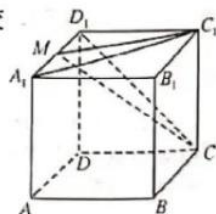




河南省开封市5县联考2022-2023学年高一下学期第二次月考数学试题

一、单选题(本大题共8小题,共40分)

1. 设 $(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等,其中 a 为实数,则 a 等于 ()
A. -3 B. -2 C. 2 D. 3
2. 下列结论正确的是 ()
A. 底面是正三角形的三棱锥是正三棱锥
B. 所有几何体的表面都能展开成平面图形
C. 棱锥的侧棱长与底面多边形的边长相等,则该棱锥可能是正六棱锥
D. 一个直角三角形绕其一条直角边所在直线旋转形成的封闭曲面所围成的图形叫做圆锥
3. 某学校共有 980 名学生,其中高一年级的学生有 400 名,高二的学生有 300 名,其余都是高三的学生,为了解该校学生的体育锻炼时间,按照高一、高二、高三三个级段进行分层抽样,如果样本容量为 196,那么应在高三的学生中抽取 ()
A. 48 名 B. 52 名 C. 56 名 D. 60 名
4. 《九章算术》是我国数学史上堪与欧几里得《几何原本》相媲美的数学名著,其第五卷《商功》中有如下问题:“今有圆堡,周四丈八尺,高一丈一尺,问积几何?”这里所说的圆堡就是圆柱体,其底面周长是 4 丈 8 尺,高 1 丈 1 尺,问它的体积是多少?若 π 取 3,估算该圆堡的体积为 () 立方尺 (1 丈 = 10 尺).
A. 1998 B. 2012 C. 2112 D. 2324
5. m, n 为空间中两条不重合直线, α 为空间中一平面,则下列说法正确的是 ()
A. 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$
B. 若 $m \perp \alpha, m \parallel n$, 则 $n \perp \alpha$
C. 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$
D. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$
6. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1D_1 中点,过 A_1C_1 且与 CD_1 平行的平面交平面 C_1CM 于直线 l ,则直线 l 与 AB 所成角的余弦值是 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
7. 奔驰定理:已知 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点, $\triangle BOC, \triangle AOC, \triangle AOB$ 的面积分别为 S_A, S_B, S_C , 则 $S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$. “奔驰定理”是平面向量中一个非常优美的结论,因为这个定理对应的图形与“奔驰”轿车的 logo 很相似,故形象地称其为“奔驰定理”. 设 O 为三角形 ABC 内一点,且满足: $\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = 3\vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CA}$, 则 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = ()$



- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$



8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{2\sqrt{3}\sin A}{3\sin C}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 则 $a + c$ 的最大值是 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

9. 下列情况不适合抽样调查的有 ()

- A. 调查一个县各村的粮食播种面积
B. 了解一批炮弹的杀伤直径
C. 了解高一 (1) 班 40 名学生在校一周内的消费
D. 调查一批鱼苗的生长情况

10. 要考察某种品牌的 850 颗种子的发芽率, 从中抽取 50 颗种子进行实验, 利用随机数表法抽取种子, 先将 850 颗种子按 001, 002, $\dots$, 850 进行编号, 如果从随机数表第 2 行第 2 列的数开始并向右读, 下列选项中属于最先检验的 4 颗种子中一个的是 ()

(下面抽取了随机数表第 1 行至第 3 行)

03474373863696473661469863716233261680456011141095

97749467744281145720425332373227073607512451798973

16766227665650267107329079785313553858598897541410

- A. 774 B. 946 C. 428 D. 572

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则下列各组条件中使得 $\triangle ABC$ 有唯一解的是 ()

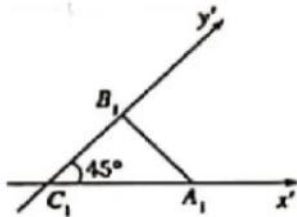
- A. $b = 10, A = 45^\circ, C = 70^\circ$ B. $a = 7, b = 5, A = 60^\circ$
C. $a = 14, b = 16, A = 45$ D. $a = 3, c = 4, \cos C = \frac{1}{3}$

12. 已知正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $AB = 2A_1B_1 = 2, AA_1 = \sqrt{2}$, E 为 $\triangle BDC_1$ 内部 (含边界) 的动点, 则 ()

- A. $AA_1 \parallel$ 平面 BDC_1
B. 球 O 的表面积为 8π
C. $EA + EA_1$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$
D. 若 AE 与平面 BDC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$, 则 E 点轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

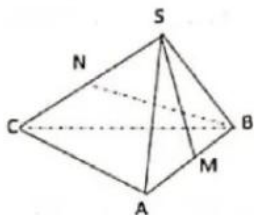
二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分. 其中第 16 题第一个空 2 分, 第二个空 3 分)

13. 已知总体划分为 3 层, 通过分层抽样, 得到各层的平均数分别为 45, 48, 50, 各层的样本容量分别为 30, 50, 20 则估计总体平均数为 _____.
14. 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{5}$, 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta =$ _____.
15. 水平放置的 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图所示, 若 $A_1C_1 = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 则 A_1B_1 的长为 _____.



16. 如图, 在三棱锥 $S - ABC$ 中, $SA = SB = SC$, 且 $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \frac{\pi}{2}$, M, N 分别是 AB 和 SC 的中

点. 则异面直线 SM 与 BN 所成的角的余弦值为 _____, 直线 SM 与面 SAC 所成角大小为 _____.



四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题 10 分) 在复平面内有一个矩形 $OABC$, $|OC| = \sqrt{3}|OA|$, 点 C 在第二象限, 点 A 所对应的复数是 $2 + i$, 求另外两个顶点 B, C 所对应的复数.

18. (本小题 12 分) 平面内给定三个向量 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (4, 1)$.

- (1) 求 $|3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}|$;
- (2) 求满足 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ 的实数 m 和 n ;
- (3) 若 $(\vec{a} + k\vec{c}) \perp (2\vec{b} - \vec{a})$, 求实数 k .

19. (本小题 12 分) 如图, D 是直角三角形 ABC 斜边 BC 上一点, $AC = \sqrt{3}DC$.

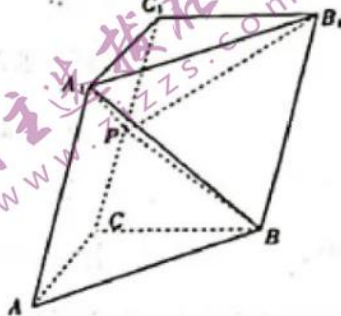


- (1) 若 $\angle DAC = 30^\circ$, 求角 $\angle ADC$ 的大小;
- (2) 若 $BD = 2DC$, 且 $DC = 1$, 求 AD 的长.

20. (本小题 12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=1$, $\angle ACB=120^\circ$, $AA_1=A_1B=2$, $\angle A_1AC=60^\circ$.

(1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 A_1ACC_1 .

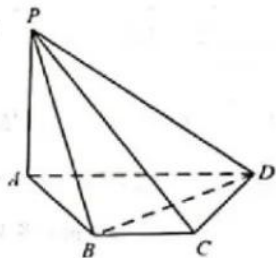
(2) 若 P 为 CC_1 的中点, 求 B_1 到平面 A_1BP 的距离.



21. (本小题 12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD=2$, $AB=BC=CD=1$, $BC \parallel AD$, $\angle PAD=90^\circ$, $\angle PBA$ 为锐角, 平面 $PBA \perp$ 平面 PBD .

(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 AD 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 求二面角 $P-BD-C$ 的余弦值.

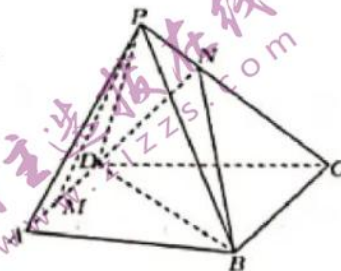


22. (本小题 12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=CD=3$, $BC=4$, $\triangle PBC$ 为正三角形, 点 M, N 分别在线段 AD 和 PC 上, 且 $\frac{DM}{AM} = \frac{CN}{PN} = 2$. 设二面角 $P-AD-B$ 为 θ , 且 $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

(1) 求证: $PM \parallel$ 平面 BDN ;

(2) 求直线 PM 与平面 PBC 所成角的正弦值;

(3) 求三棱锥 $P-ABN$ 的体积.





2022-2023 学年高一下学期第二次月考数学试卷

1-4. ADCC5-8. BDDC9. AC10. ACD11. ABD12. ABD

13. 47.514. $\frac{1}{4}$ 15. $\sqrt{2}$ 16. $\frac{\sqrt{10}}{5}$; $\frac{\pi}{4}$

三、解答题

17. 顶点 B 对应的复数是 $(2+i) \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (2+i)(1+\sqrt{3}i) = 2-\sqrt{3} + (2\sqrt{3}+1)i$

顶点 C 对应的复数是 $(2+i) \cdot \sqrt{3}i = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$

18. 解: (1) 由 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (4, 1)$, 得 $3\vec{a} = (9, 6)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $2\vec{c} = (8, 2)$

$\therefore 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = (9-1-8, 6+2-2) = (0, 6)$, $\therefore |3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$;

(2) $\because m\vec{b} = (-m, 2m)$, $n\vec{c} = (4n, n)$, $\therefore m\vec{b} + n\vec{c} = (4n-m, 2m+n)$,

$\therefore \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$, $\therefore \vec{a} = (3, 2) = (4n-m, 2m+n)$,

故 $\begin{cases} 4n-m=3 \\ 2m+n=2 \end{cases}$, 解得 $m = \frac{5}{9}$, $n = \frac{8}{9}$;

(3) $\because \vec{a} = (3, 2)$, $k\vec{c} = (4k, k)$, $\therefore \vec{a} + k\vec{c} = (3+4k, k+2)$,

$\therefore \vec{a} = (3, 2)$, $2\vec{b} = (-2, 4)$, $\therefore 2\vec{b} - \vec{a} = (-5, 2)$,

$\therefore (\vec{a} + k\vec{c}) \perp (2\vec{b} - \vec{a})$, $\therefore (\vec{a} + k\vec{c}) \cdot (2\vec{b} - \vec{a}) = 0$, 即 $-5(3+4k) + 2(k+2) = 0$,

解得 $k = -\frac{11}{18}$.

19. 解: (1) 在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{DC}{\sin \angle DAC}$,

所以, $\sin \angle ADC = \frac{AC \cdot \sin \angle DAC}{DC} = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

又 $\angle ADC = B + \angle BAD = B + (90^\circ - \angle DAC) = B + 60^\circ > 60^\circ$

所以, $\angle ADC = 120^\circ$.

(2) 由 $BD = 2DC$, 且 $DC = 1$ 知: $BC = 3$, $AC = \sqrt{3}$

所以, 直角三角形 ABC 中, $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos C$

$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cos C = (\sqrt{3})^2 + 1 - 2\sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$

所以, $AD = \sqrt{2}$.

20. (1) 证明: 如图, 连接 A_1C , 在 $\triangle A_1AC$ 中, $A_1A = 2$, $AC = 1$, $\angle A_1AC = 60^\circ$,

由余弦定理得 $A_1C = \sqrt{3}$,

所以 $A_1C^2 + AC^2 = A_1A^2$, 所以 $A_1C \perp AC$.

同理 $A_1C \perp BC$. 又因为 $BC \cap AC = C$, 所以 $A_1C \perp$ 平面 ABC .

因为 $A_1C \subset$ 平面 A_1ACC_1 , 所以平面 $ABC \perp$ 平面 A_1ACC_1 .

(2) 解: 过 C_1 作 $C_1D \perp AC$ 于 D , 连接 BD , BC_1 .

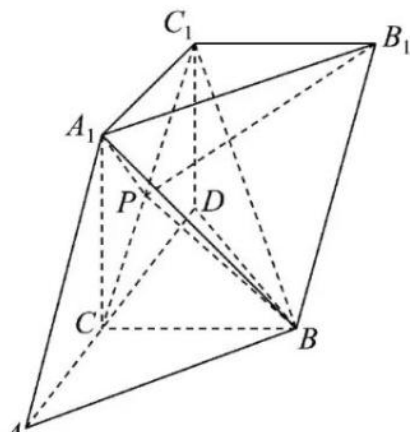
由 (1) 知 $A_1C \perp$ 平面 ABC , 所以 $C_1D \perp$ 平面 ABC .

因为 $AA_1 = A_1B = CC_1 = 2$, $\angle A_1AC = \angle C_1CD = 60^\circ$, 所以 $CD = 1$, $C_1D = \sqrt{3}$.

因为 $\angle ACB = 120^\circ$, 所以 $\angle DCB = 60^\circ$.

因为 $BC = CD = 1$, 所以 $BD = 1$, 所以 $BC_1 = \sqrt{BD^2 + C_1D^2} = 2$.

在 $\triangle C_1BC$ 中, 因为 $BC_1 = 2$, $BC = 1$, $CC_1 = 2$,





$$\text{所以 } \cos \angle C_1CB = \frac{1^2 + 2^2 - 2^2}{2 \times 1 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{因为 } P \text{ 为 } CC_1 \text{ 的中点, 所以 } A_1P = \frac{1}{2}CC_1 = 1, BP = \sqrt{1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{在 } \triangle AP_1B \text{ 中, 因为 } A_1B = 2, A_1P = 1, BP = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{所以 } \cos \angle BA_1P = \frac{1^2 + 2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{2 \times 1 \times 2} = \frac{7}{8},$$

$$\text{所以 } \sin \angle BA_1P = \frac{\sqrt{15}}{8}, \text{ 于是 } \triangle A_1PB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\text{因为 } V_{P-A_1B_1B} = V_{C-A_1B_1B} = V_{C-AA_1B} = V_{A_1-ABC},$$

$$\text{所以三棱锥 } A_1-B_1BP \text{ 的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{1}{4}.$$

设 B_1 到平面 A_1BP 的距离为 d .

因为三棱锥 A_1-B_1BP 的体积与三棱锥 B_1-A_1BP 的体积相同,

$$\text{所以 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{8} \times d = \frac{1}{4}, \text{ 解得 } d = \frac{2\sqrt{15}}{5},$$

$$\text{即 } B_1 \text{ 到平面 } A_1BP \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

21.(1) 证明: 在平面 PBA 内过 A 作 $AE \perp PB$ 于 E ,

因为平面 $PBA \perp$ 平面 PBD , 又平面 $PBA \cap$ 平面 $PBD = PB$,

所以 $AE \perp$ 平面 PBD , $\therefore BD \subset$ 平面 PBD , 所以 $AE \perp BD$,

过 B, C 分别作 $BM, CN \perp AD$ 于 M, N ,

取 AD 中点为 Q , 则 $BC = QD$, 且 $BC \parallel QD$,

所以四边形 $BCDQ$ 是平行四边形, $BQ = CD$,

所以 $QD = BQ = QA = 1$,

所以 $\angle ABD = 90^\circ$, $BD \perp AB$,

$\therefore AB \cap AE = A$, 且 $AB, AE \subset$ 平面 PBA , 所以 $BD \perp$ 平面 PBA , $\therefore PA \subset$ 平面 PBA

所以 $BD \perp PA$, 因为 $PA \perp AD$, $AD \cap BD = D$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 二面角 $P-BD-C$ 的平面角与二面角 $P-BD-A$ 的平面角互补,

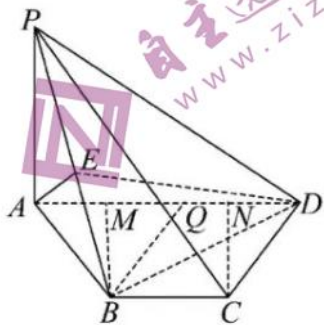
由 (1) 可得 $BD \perp AB$, $BD \perp$ 平面 PBA , 因为 $PB \subset$ 平面 PBA , 所以 $BD \perp PB$,

所以 $\angle PBA$ 为二面角 $P-BD-A$ 的平面角, 连接 ED ,

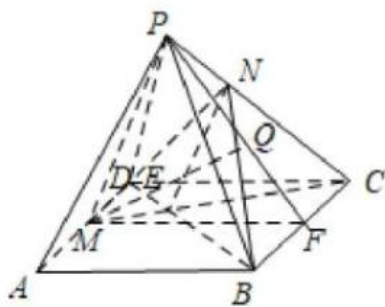
在 $Rt\triangle AED$ 中, $\angle ADE$ 为 AD 与平面 PBD 所成的角, 由其正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $AD = 2$,

$$\text{可得 } AE = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 因为 } AB = 1, \text{ 所以 } BE = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \cos \angle PBA = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以二面角 } P-BD-C \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



22. 解: (1) 证明: 如图所示: 连接 MC , 交 BD 于 E ,



$\because \frac{DM}{AM} = 2, AD = 3, \therefore DM = 2, AM = 1, \therefore AD \parallel BC,$

$\therefore \triangle MDE \sim \triangle CBE, \frac{CE}{EM} = \frac{BC}{DM} = 2 = \frac{CN}{NP}, \therefore PM \parallel NE,$

$\because NE \subset \text{平面 } BDN, PM \not\subset \text{平面 } BDN, \therefore PM \parallel \text{平面 } BDN;$

(2) 如图所示:取 BC 中点 F , 连接 ME, PF ,

$\because \triangle PBC$ 为正三角形, $\therefore PF \perp BC, PF = PB \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3},$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, \angle ADC = 90^\circ, FC = MD = 2,$

$\therefore$ 四边形 $DMFC$ 为矩形, 即 $MF \perp BC,$

$\because MF \cap PF = F, \therefore BC \perp \text{平面 } PMF,$

又 $\because BC \subset \text{平面 } PBC, \therefore \text{平面 } PBC \perp \text{平面 } PMF,$

$\because AD \parallel BC, \therefore AD \perp \text{平面 } PMF, \therefore AD \perp MP, AD \perp MF,$ 即 $\angle PMF = \theta,$

设 $PM = x$, 由余弦定理得: $PF^2 = PM^2 + MF^2 - 2 \cdot PM \cdot MF \cdot \cos \theta,$

于是 $(2\sqrt{3})^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}$, 整理得 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 解得: $x = 3$ 或 $x = -1$ (舍去),

取 PF 中点 Q , 连接 $MQ, \because MP = MF, \therefore MQ \perp PF,$

又 $\because \text{平面 } MPF \perp \text{平面 } PBC,$

$\therefore MQ \perp \text{平面 } PBC,$

即直线 PM 与平面 PBC 所成角为 $\angle MPQ$, 而 $MQ = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$

$\therefore$ 直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\sin \angle MPQ = \frac{MQ}{PM} = \frac{\sqrt{6}}{3};$

(3) $\because AD \parallel BC, BC \subset \text{平面 } PBC, AD \not\subset \text{平面 } PBC,$

$\therefore AD \parallel \text{平面 } PBC,$

即 MQ 的长也是 A 点到平面 PBC 的距离,

$\because S_{\triangle PBN} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBC}, \therefore V_{P-ABN} = V_{A-PBN} = \frac{1}{3} V_{A-PBC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线