绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

龙岗区 2021-2022 学年第一学期期中质量监测试题

高三数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	B	C	A	D

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BCD	ABD	AB	ACD

三、填空题：

题号	13	14	15	16
答案	-4	$1-2m$	-6	$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

四、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 当 $n=1$ 时，由 $S_n=2a_n-1$　　①

可得 $S_1=a_1=2a_1-1$，故 $a_1=1$. ……………………1 分

当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$　　② ……………………2 分

由①和②相减得：$a_n=2a_{n-1}\quad(n\ge 2)$， ……………………3 分

故数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，其中首项为 1，公比为 2. ……………………4 分

所以 $a_n=2^{n-1}$. ……………………5 分

(2) 由 (1) 知 $na_n=n2^{n-1}$.

$T_n=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$ ……………………6 分

$2T_n=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$ ……………………7 分

两式相减得 $-T_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$ ……………………8 分

$=(1-n)\cdot 2^n-1$ ……………………9 分

所以$T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. ……10分

18.【解析】(1)证明：因为AD为$\angle BAC$的角平分线，故$\angle BAD=\angle DAC$ ……1分

在ΔABD中，由正弦定理可得：$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$ ① ……2分

在ΔADC中，由正弦定理可得：$\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$ ② ……3分

由①和②可得$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB\cdot\sin\angle ADC}{AC\cdot\sin\angle ADB}$ ……4分

又$\angle ADC+\angle ADB=180^\circ$，故$\sin\angle ADC=\sin\angle ADB$ ……5分

可得：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=2$，即$AB=2AC$ ……6分

(2)由题意可知$AD=BD=2$，$DC=1$，由(1)知$AB=2AC$，不妨设$AB=2AC=2x$.

在ΔABD中，由余弦定理可得：$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$

即$4x^2=8-8\cos\angle ADB$ ③ ……7分

在ΔADC中，由余弦定理可得：$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$

即$x^2=5-4\cos\angle ADC$ ④ ……8分

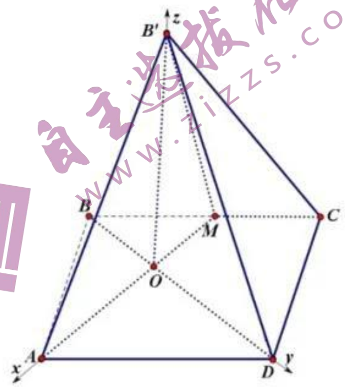
由又$\angle ADC+\angle ADB=180^\circ$，故$\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB$ ……9分

由③和④可解得：$x=\sqrt{3}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{1}{2}$ ……10分

从而可得$AB=2\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{3}$，$BC=3$，

在ΔABC中，由余弦定理得：$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{1}{2}$ ……11分

又$0^\circ<\angle BAC<180^\circ$，故$\angle BAC=60^\circ$ ……12分



19.【解析】

(1) 证明：矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=3\sqrt{2}$，点 M 为 BC 的中点

则 $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，$BD=3\sqrt{3}$

由于△BOM ~ △DOA，故 $\dfrac{BM}{DA}=\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{BO}{DO}=\dfrac{1}{2}$

故 $OM=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$OB=\dfrac{1}{2}OD=\dfrac{1}{3}BD=\sqrt{3}$

从而 $OM^2+OB^2=\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}=BM^2$，即 $OM\perp OB$

所以 $AM\perp BD$

从而 $B'O\perp AM$，$DO\perp AM$

又 $B'O\cap DO=O$

故 $AM\perp$ 平面 $B'DO$ ……………………4 分

(2) 当平面 $B'AM\perp$ 平面 $AMCD$ 时，

由于 $B'O\perp AM$，

平面 $B'AM\cap$ 平面 $AMCD=AM$，$B'O\subset$ 平面 $B'AM$

所以 $B'O\perp$ 平面 $AMCD$． ……………………5 分

以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OB'}$ 为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(\sqrt{6},0,0)$，$B'(0,0,\sqrt{3})$，$D(0,2\sqrt{3},0)$，$C(-\sqrt{6},\sqrt{3},0)$

∴ $\overrightarrow{B'A}=(\sqrt{6},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B'D}=(0,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B'C}=(-\sqrt{6},\sqrt{3},-\sqrt{3})$ ……………6 分

设平面 $AB'D$ 法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{B'A}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{B'D}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{6}x_1-\sqrt{3}z_1=0\\ 2\sqrt{3}y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

∴可取 $\vec{m}=(\sqrt{2},1,2)$ ……………………8 分

设平面 $CB'D$ 法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B'C}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B'D}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\sqrt{6}x_2+\sqrt{3}y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ 2\sqrt{3}y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，

$\therefore$可取$\vec{n}=(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ ························10 分

$\therefore$ $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{4\sqrt{154}}{77}$. ························11 分

$\therefore$二面角$A-B'D-C$的余弦值为$-\dfrac{4\sqrt{154}}{77}$. ························12 分

20.【解析】(1)法一：

设选手甲在A区发 2 次球的得分次数为X，则$X\sim B(2,\dfrac{2}{3})$，故$E(X)=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$，

则甲在A区发球得分的期望为$2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$. ························3 分

设选手甲在B区发 3 次球的得分次数为Y，则$Y\sim B(3,\dfrac{1}{3})$，故$E(Y)=3\times\dfrac{1}{3}=1$，

则甲在B区发球得分的期望为$3\times1=3$. ························6 分

由于 $3>\dfrac{8}{3}$. 故选手甲应该选择在B区发球. ························7 分

法二：

设选手甲在A区得分为ξ，则ξ的值可能为 0、2、4，故

$P(\xi=0)=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$，$P(\xi=2)=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，$P(\xi=4)=(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{9}$

则甲在A区发球得分的期望$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{9}+2\times\dfrac{4}{9}+4\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{3}$ $2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$. ························3 分

设选手甲在B区得分为η，则η的值可能为 0、3、6、9，故

$P(\eta=0)=(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$，$P(\eta=3)=C_3^1\times(\dfrac{2}{3})^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{12}{27}$，

$P(\eta=6)=C_3^2(\dfrac{1}{3})^2(\dfrac{2}{3})^1=\dfrac{6}{27}$，$P(\eta=9)=(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{1}{27}$

则甲在B区发球得分的期望$E(\eta)=0\times\dfrac{8}{27}+3\times\dfrac{12}{27}+6\times\dfrac{6}{27}+9\times\dfrac{1}{27}=3$. ························6 分

由于 $3>\dfrac{8}{3}$. 故选手甲应该选择在B区发球. ························7 分

(2) 设选手甲在A区得分高于在B区得分为事件C，甲在A区得 2 分、在B区得 0 分为事件

C_1，甲在 A 区得 4 分、在 B 区得 0 分为事件 C_2，甲在 A 区得 4 分、在 B 区得 3 分为事件 C_3，则 $C=C_1\cup C_2\cup C_3$，显然，C_1、C_2、C_3 为互斥事件，……8 分

则 $P(C_1)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{243}$，……9 分

$P(C_2)=(\frac{2}{3})^2\times(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{243}$，……10 分

$P(C_3)=(\frac{2}{3})^2\times C_3^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{16}{81}$ ……11 分

$P(C)=P(C_1\cup C_2\cup C_3)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)=\frac{112}{243}$.

故选手甲在 A 区得分高于在 B 区得分的概率为 $\frac{112}{243}$. ……12 分

21.【解析】(1) 当过点 P 的直线方程为 $x=3$ 时，直线与圆 O 不相切，

故可设切线方程为 $y=k(x-3)+2$，即 $kx-y-3k+2=0$ ……1 分

圆心到直线的距离 $d=\frac{|-3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，整理得 $5k^2-12k=0$ ……2 分

解得 $k=0$ 或 $k=\frac{12}{5}$， ……3 分

切线方程为 $y=2$ 或 $12x-5y-26=0$. ……4 分

(2) ① 由题意可知，直线 CD 斜率不为零，可设直线 CD 的方程为 $x=my+n$，其中 $n\neq-2$

$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，将直线和圆的方程联立

$\begin{cases}x=my+n\\x^2+y^2=4\end{cases}$，整理得 $(m^2+1)y^2+2mny+n^2-4=0$， ……5 分

$\Delta>0$，由韦达定理得：$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+1},\\y_1y_2=\frac{n^2-4}{m^2+1}\end{cases}$ ……6 分

由题意知 $k_{AC}k_{AD}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-\frac{1}{3}$，得 $3y_1y_2+(x_1+2)(x_2+2)=0$ ……7 分

代入韦达定理并化简得：

$3y_1y_2+(x_1+2)(x_2+2)=\left(m^2+3\right)y_1y_2+m(n+2)(y_1+y_2)+(n+2)^2$

$=\left(m^2+3\right)\dfrac{n^2-4}{m^2+1}+m(n+2)\dfrac{-2mn}{m^2+1}+(n+2)^2=\dfrac{n+2}{m^2+1}(4n-4)=0$ ……………………8 分

所以 $n=1$，CD 的方程为 $x=my+1$，经过定点 $(1,0)$． ……………………9 分

② 设 AD 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，得 $N\left(4,\dfrac{6y_2}{x_2+2}\right)$，即 $N\left(4,\dfrac{-2}{k_{AC}}\right)$ ……………………10 分

$$k_{CN}=\frac{\dfrac{-2}{k_{AC}}-y_1}{4-x_1}=\frac{1}{k_{AC}}\cdot\frac{-2-y_1k_{AC}}{4-x_1}=\frac{1}{k_{AC}}\cdot\frac{-2-\dfrac{y_1^2}{x_1+2}}{4-x_1}=\frac{1}{k_{AC}}\cdot\frac{-2-\dfrac{4-x_1^2}{x_1+2}}{4-x_1}=-\frac{1}{k_{AC}}$$

则 $k_{AC}k_{CN}=-1$ ……………………12 分

22.【解析】(1) 证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-x^2-x-1$

$f'(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$，$f''(x)=\mathrm{e}^x-2>0$，故 $f'(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 为增函数，……………………2 分

则 $f'(x)>f'(2)=e^2-5>0$，故 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 为增函数，

所以 $f(x)>f(2)=e^2-7>0$．

……………………4 分

(2) 令 $g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$，易知 $g(0)=0$，

$g'(x)=\mathrm{e}^x-2a$，

①当 $a\le 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，

又 $g(0)=0$，故 $x<0$ 时，$g(x)<0$，$x>0$ 时，$g(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，不满足题意．

……………………6 分

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2a=0$，则 $x=\ln 2a$

当 $x<\ln 2a$ 时，$g'(x)<0$，$x>\ln 2a$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 单调递增． ……………………7 分

当$0<a\le\frac{1}{2}$时，$\ln 2a\le 0$，故$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，且$g(x)>g(0)=0$，

此时$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，不存在极值点$m>0$，不合题意.

……………………………………8分

当$a>\frac{1}{2}$时，$\ln 2a>0$，又$g(x)$在$(0,\ln 2a)$单调递减，在$(\ln 2a,+\infty)$单调递增.

故$g(\ln 2a)<g(0)=0$，又因为$2a+1>2$，由(1)可知

$g(2a+1)=e^{2a+1}-2a(2a+1)-1>(2a+1)^2+(2a+1)+1-2a(2a+1)-1=4a+2>0$

故$g(x)$在$(0,+\infty)$有唯一零点$m\in(\ln 2a,2a+1)$，此时$f(x)$在$(0,m)$单调递减，在$(m,+\infty)$

单调递增，且$g(m)=e^m-2am-1=0$，　　……………………………………10分

所以$f(m)=e^m-am^2-m-a=2am+1-am^2-m-a=-a-1$，

易得$m=2$　　……………………………………11分

故$a=\frac{e^m-1}{2m}=\frac{e^2-1}{4}$.

综上所述，满足题意的a值为$\frac{e^2-1}{4}$.　　……………………………………12分