绝密★启用前

2023—2024学年高中毕业班阶段性测试(二)

数　学

自主选拔在线 www.zizzs.com

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid\log_3(x+1)\leqslant1\}$, $B=\{x\mid(x+3)(1-x)\geqslant0\}$,则 $A\cap B=$

A. $(-1,1]$　　B. $[-3,2]$　　C. $[-3,1]$　　D. $[1,2]$

2. 已知 p:指数函数 $f(x)=(3a-2)^x$ 是增函数, q: $a>\dfrac{1}{2}$,则 p 是 q 的

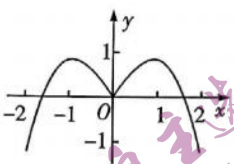
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

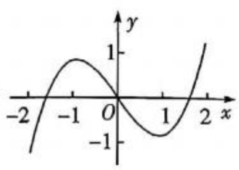
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

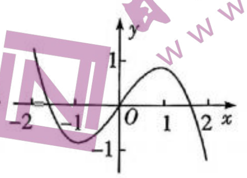
3. 已知角 α 的顶点在坐标原点,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $(t,-1)$,若 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

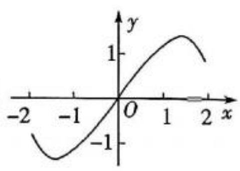
A. -3　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

4. 函数 $f(x)=\dfrac{(4^x-1)\cos x}{2^x}$ 的部分图象大致为

A.


B.


C.


D.


5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x+1}, x\leqslant 1,\\ -f(x-1), x>1,\end{cases}$ 则 $f(2\ 024-\ln 2)=$

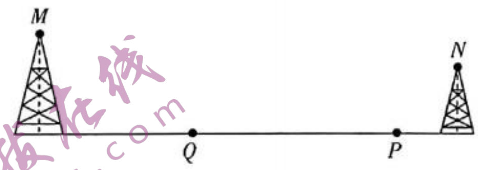
A. $-\frac{1}{2}e^2$　　B. $-\frac{1}{2}e$　　C. $\frac{1}{2}e$　　D. $\frac{1}{2}e^2$

6. 函数 $f(x)=(2\cos x-1)\sin x+\cos x$ 的值域为

A. $\left[\sqrt{2}-1,\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[-1-\sqrt{2},\frac{5}{4}\right]$

C. $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$　　D. $[-1,1]$

7. 如图，为了测量两个信号塔塔尖 M,N 之间的距离，选取了同一水平面内的两个测量基点 P 与 Q（M,N,P,Q 在同一铅垂平面内）. 已知在点 P 处测得点 M 的仰角为 $15°$，点 N 的仰角为 $45°$，在点 Q 处测得点 M 的仰角为 $30°$，点 N 的仰角为 $15°$，且 $PQ=400$ 米，则 $MN=$



A. $200\sqrt{2}$米　　B. 400 米　　C. $400\sqrt{3}$米　　D. $400\sqrt{5}$米

8. 已知 $a=\log_6 4, b=\log_5 3, c=\log_7 6$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 A,B 是函数 $f(x)=\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象与直线 $y=3$ 的两个交点，则下列结论正确的是

A. $|AB|_{\min}=\frac{\pi}{3}$

B. $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\in\mathbf{R}\middle|x\neq 3k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增

D. $f(x)$ 的图象的对称中心为点 $\left(\frac{k\pi}{6}-\frac{\pi}{18},0\right),k\in\mathbf{Z}$

10. 已知函数 $f(x)=m\ln x+\frac{x^2+n}{x}$ 在 $x=1$ 处取得极大值 -1，则下列结论正确的是

参考数据：$\ln 2\approx 0.7$.

A. $n=2$

B. $m=-3$

C. $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值

D. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},4\right]$ 的最小值为 $3\ln 2-\frac{7}{2}$

11. 已知$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$为偶函数,$g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,则下列结论正确的是

A. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. 若$g(x)$的最小正周期为3π,则$\omega=\frac{2}{3}$

C. 若$g(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有3个最值点,则ω的取值范围为$\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right]$

D. 若$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\omega$的最小值为2

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^4-2x^3, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)-mx^2$,则下列结论正确的是

A. 若$g(x)$恰有2个零点,则$m<0$或$\frac{1}{2e}<m<1$

B. 若$g(x)$恰有3个零点,则$m=0$

C. 当$0<m<\frac{1}{2e}$时,$g(x)$恰有5个零点

D. 当$m>1$时,$g(x)$仅有1个零点

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知函数$f(x)=x^2\lg(\sqrt{1+ax^2}-3x)$是定义域为$\mathbf{R}$的奇函数,则实数$a$的值为________.

14. 已知命题"$\exists x\in\mathbf{R}, e^{2x}+e^2<ae^x$"为假命题,则实数$a$的最大值为________.

15. 已知$\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}$,且$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则$\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=$________.

16. 已知函数$f(x)=\ln x-k(x^2-x)$,若不等式$f(x)>0$恰有一个整数解,则实数k的取值范围为________.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$,当$x=\frac{\pi}{6}$时,$f(x)$取得最大值2,$f(x)$的图象上与该最大值点相邻的一个对称中心为点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$.

(Ⅰ)求$f(x)$的解析式;

(Ⅱ)将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到函数$g(x)$的图象,求$g(x)$在区间$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$上的值域.

18.（12 分）

某村民欲修建一座长方体形水窖，水窖的容积为 6 立方米，深度为 1.5 米，底面周长不超过 10 米，水窖的底部每平方米造价为 400 元，侧面每平方米造价为 200 元，顶部每平方米造价为 300 元，设水窖的底面一边长为 x（单位：米），总造价为 $f(x)$（单位：元）.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式及定义域.

（Ⅱ）当 x 取何值时，水窖的总造价 $f(x)$ 最低？最低是多少？

19.（12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\dfrac{(b^2+c^2-a^2)\sin C}{2b\sin A\cos C}+\dfrac{c^2}{2b+c}=0$.

（Ⅰ）求角 A；

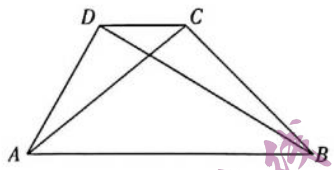
（Ⅱ）已知 $a=\sqrt{3}$，求△ABC 面积的取值范围.

20.（12 分）

如图所示，在平面四边形 $ABCD$ 中，$CD=2$，$DA=2\sqrt{3}$，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle BCD=\dfrac{3\pi}{4}$，△$CDA$ 的面积为 $-6\cos\angle CDA$.

（Ⅰ）求 AC；

（Ⅱ）求 $\tan\angle DBC$.



21.（12 分）

已知曲线 $f(x)=x^3+2x^2+mx+n$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=4x+3$.

（Ⅰ）求 m,n 的值；

（Ⅱ）已知 k 为整数，关于 x 的不等式 $f(x+x\ln x)>f(k(x-1))$ 在 $x>1$ 时恒成立，求 k 的最大值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)(e^x-ax)(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=2$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

（Ⅱ）已知关于 x 的方程 $f(x)=(x-3)e^x+2ax$ 恰有 2 个不同的正实数根 x_1,x_2.

（ⅰ）求 a 的取值范围；

（ⅱ）求证：$x_1+x_2>4$.

2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试(二)

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. A　2. A　3. C　4. C　5. A　6. B　7. D　8. B

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. AD　10. BCD　11. ABC　12. CD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 9　14. 2e

15. $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$　16. $\left[\frac{\ln 3}{6},\frac{\ln 2}{2}\right)$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)设 $f(x)$ 的最小正周期为 T. 由题知,$A=2$, ……………………(1 分)

$\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$,$\therefore T=\pi$,

$\because T=\frac{2\pi}{\omega}$,$\therefore \omega=2$, ……………………(2 分)

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$,

$\therefore \varphi+\frac{\pi}{3}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ……………………(3 分)

$\therefore \varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,

$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$,$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}$, ……………………(4 分)

$\therefore f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)由题知,$g(x)=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, ……………………(6 分)

$\because 0\leqslant x<\frac{5\pi}{12}$,

$\therefore -\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$, ……………………(7 分)

$\therefore -\frac{1}{2}<\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$, ……………………(8 分)

$\therefore -1<2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$, ……………………(9 分)

$\therefore g(x)$在区间$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right)$上的值域为$(-1,2]$. …………………………………… (10 分)

18. **解析** (Ⅰ)由题知,水窖底面积为$6\div1.5=4$平方米,

$\therefore$ 水窖底部造价为$4\times400=1\ 600$元,

顶部造价为$4\times300=1\ 200$元. …………………………………… (1 分)

$\because$ 水窖的底面一边长为x,

$\therefore$ 水窖底面的另一边长为$\frac{4}{x}$,

$\therefore$ 水窖的侧面积为$2x\times1.5+2\times\frac{4}{x}\times1.5=3x+\frac{12}{x}$,

$\therefore$ 水窖侧面的造价为$\left(3x+\frac{12}{x}\right)\times200=600\times\left(x+\frac{4}{x}\right)$, …………………………………… (3 分)

$\therefore f(x)=600\left(x+\frac{4}{x}\right)+2\ 800$. …………………………………… (4 分)

由$\begin{cases}2x+\frac{8}{x}\leqslant10,\\ x>0,\end{cases}$解得$1\leqslant x\leqslant4$,

$\therefore$ 定义域为$[1,4]$. …………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$f(x)=600\left(x+\frac{4}{x}\right)+2\ 800(1\leqslant x\leqslant4)$,

$\therefore f(x)\geqslant600\times2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+2\ 800=2\ 400+2\ 800=5\ 200$, …………………………………… (8 分)

当且仅当$x=\frac{4}{x}$即$x=2$时,取等号, …………………………………… (10 分)

$\therefore f(x)_{\min}=5\ 200$, …………………………………… (11 分)

$\therefore$ 当$x=2$时,水窖总造价最低,最低为5 200元. …………………………………… (12 分)

19. **解析** (Ⅰ)$\because \frac{(b^2+c^2-a^2)\sin C}{2b\sin A\cos C}+\frac{c^2}{2b+c}=0$,

$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{\sin C}{\sin A\cos C}+\frac{c}{2b+c}=0$, …………………………………… (1 分)

$\therefore \frac{\sin C\cos A}{\sin A\cos C}+\frac{\sin C}{2\sin B+\sin C}=0$. …………………………………… (2 分)

$\because \sin C\neq0$,

$\therefore 2\sin B\cos A+\sin C\cos A+\sin A\cos C=0$,

$\therefore 2\sin B\cos A+\sin(A+C)=0$, …………………………………… (3 分)

$\therefore 2\sin B\cos A+\sin B=0$. …………………………………… (4 分)

$\because \sin B\neq0$,

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$, …………………………………… (5 分)

$\because 0<A<\pi$,

$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$. ……（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $B+C=\frac{\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}-C$，

由正弦定理知 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2$，

$\therefore b=2\sin B, c=2\sin C$. ……（7 分）

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sin B\times 2\sin C\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)\sin C$

$=\frac{3}{2}\sin C\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 C$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……（9 分）

$\because 0<C<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore \frac{1}{2}<\sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

$\therefore 0<\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$， ……（11 分）

$\therefore$ $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$. ……（12 分）

20. **解析** （Ⅰ）由题知，$S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}CD\times DA\sin\angle CDA=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\sin\angle CDA=-6\cos\angle CDA$， ……（1 分）

$\therefore \tan\angle CDA=-\sqrt{3}$，$\because 0<\angle CDA<\pi$，$\therefore \angle CDA=\frac{2\pi}{3}$， ……（3 分）

由余弦定理知，$AC^2=CD^2+DA^2-2CD\times DA\cos\angle CDA$

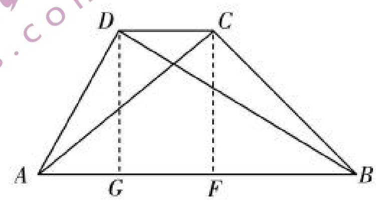
$=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 2\times 2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=16+4\sqrt{3}$， ……（5 分）

$\therefore AC=2\sqrt{4+\sqrt{3}}$. ……（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$\angle CDA+\angle BAD=\pi$，$\therefore BA // CD$. ……（7 分）

如图所示，作 $CF\perp AB$，$DG\perp AB$，垂足分别为 F，G，



则 $FG=CD=2$，$DG=DA\sin\frac{\pi}{3}=3$，$\therefore CF=3$. ……（8 分）

$\because \angle BCD=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$\therefore BF=3$，…………（9 分）

$\therefore BG=BF+FG=5$，

$\therefore \tan\angle ABD=\frac{DG}{BG}=\frac{3}{5}$. …………（10 分）

$\therefore \tan\angle DBC=\tan(\angle ABC-\angle ABD)=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+1\times\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$. …………（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）由题知，$f'(x)=3x^2+4x+m$，$f(0)=n$，

$\therefore f'(0)=m$，…………（2 分）

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=4x+3$，

$\therefore m=4$，$n=3$. …………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=x^3+2x^2+4x+3$，

$\therefore f'(x)=3x^2+4x+4=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，…………（5 分）

$\because$ 关于 x 的不等式 $f(x+x\ln x)>f(k(x-1))$ 在 $x>1$ 时恒成立，

$\therefore$ 不等式 $x+x\ln x>k(x-1)$ 即 $k<\frac{(1+\ln x)x}{x-1}$ 在 $x>1$ 时恒成立. …………（6 分）

设 $g(x)=\frac{(1+\ln x)x}{x-1}(x>1)$，

则 $g'(x)=\frac{(2+\ln x)(x-1)-(x+x\ln x)}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$. …………（7 分）

设 $h(x)=x-\ln x-2(x>1)$，

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0(x>1)$，

$\therefore h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 是增函数，…………（8 分）

$\because h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-2\ln 2>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(3,4)$，使 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，…………（9 分）

当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(1,x_0)$ 单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，…………（10 分）

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{(1+\ln x_0)x_0}{x_0-1}=\frac{(1+x_0-2)x_0}{x_0-1}=x_0$，

$\therefore k<g(x_0)=x_0$，…………（11 分）

又 k 为整数，$x_0\in(3,4)$，$\therefore k$ 的最大值为 3. …………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）由题知 $f'(x)=(x-1)(e^x-2a)$，

若 $a=2$，则 $f'(x)=(x-1)(e^x-4)$，…………（2 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=2\ln 2$，

当 $x<1$ 或 $x>2\ln 2$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<2\ln 2$ 时，$f'(x)<0$，

— 4 —

$\therefore f(x)$在区间$(-\infty,1)$和$(2\ln 2,+\infty)$单调递增，在区间$(1,2\ln 2)$单调递减. ………………………… (5分)

(Ⅱ)(ⅰ)由题可知方程$f(x)=(x-3)e^x+2ax$即$e^x-ax^2=0$，即$a=\dfrac{e^x}{x^2}$有两个正实数根x_1,x_2. ……(6分)

设$h(x)=\dfrac{e^x}{x^2}(x>0)$，则$h'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}(x>0)$，

当$0<x<2$时，$h'(x)<0$，当$x>2$时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$在区间$(0,2)$是减函数，在区间$(2,+\infty)$是增函数，

当x从0的右侧趋近于0时，$h(x)$趋近于$+\infty$，当x趋近于$+\infty$时，$h(x)$趋近于$+\infty$，当$x=2$时，$h(x)_{\min}=\dfrac{e^2}{4}$，

$\therefore$当$a>\dfrac{e^2}{4}$时，原方程恰好有两个正实数根，即a的取值范围是$\left(\dfrac{e^2}{4},+\infty\right)$. ………………………… (8分)

(ⅱ)不妨设$0<x_1<x_2$，由题知$e^{x_1}=ax_1^2$，$e^{x_2}=ax_2^2$，

$\therefore\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2=e^{x_2-x_1}$. ………………………………………………………………………… (9分)

设$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则$t>1$，$x_2=tx_1$，$t^2=e^{x_2-x_1}$，

$\therefore 2\ln t=x_2-x_1=tx_1-x_1=(t-1)x_1$，

$\therefore x_1=\dfrac{2\ln t}{t-1}$，$\therefore x_2=\dfrac{2t\ln t}{t-1}$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2(t+1)\ln t}{t-1}$. ………………………………………………………………………… (10分)

要证$x_1+x_2>4$，即证$\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，

$\because t>1$，$\therefore$只需证$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$， ………………………………………………………… (11分)

设$m(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，

则当$t>1$时，$m'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore m(t)$在区间$(1,+\infty)$是增函数，

$\therefore m(t)>m(1)=0$，

$\therefore x_1+x_2>4$. ………………………………………………………………………………………… (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。