

湖北省部分重点中学 2020 届高三第一次联考
高三数学试卷（理科）

考试时间：2019 年 11 月 8 日上午 8:00- 10:00 试卷满分:150 分

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。）

- 集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$ ，集合 $B = \{x \mid \log_2 x < 1\}$ ，则 $A \cup B =$
A. $(-2, 3)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-2, 2)$ D. $(0, 2)$
- 已知 a 是实数， $\frac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则 a 等于
A. -1 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$
- 若 $2\sin x - \cos(\frac{\pi}{2} + x) = 1$ ，则 $\cos 2x =$
- 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_3 = 2, a_5 = 8$ ，则 $a_7 + a_8 =$
A. -32 B. 96 C. -32 或 96 D. -96 或 32
- 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ ，则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 的面积之比是
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- 下列说法正确的个数是
①命题“若 $a+b \geq 4$ ，则 a, b 中至少有一个不小于 2”的逆命题是真命题
②命题“设 $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $a+b \neq 5$ ，则 $a \neq 3$ 或 $b \neq 2$ ”是一个真命题
③“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - x_0 < 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x > 0$ ”
④已知 x, y 都是实数，“ $|x| + |y| \leq 1$ ”是“ $x^2 + y^2 \leq 1$ ”的充分不必要条件
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 下列函数中，既是偶函数，又在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增的为
A. $y = x^2 - |x|$ B. $y = 2^{|x|}$ C. $y = 2^x - 2^{-x}$ D. $y = \log_{\frac{1}{2}} |x| - x^2$
- 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + a}$ ，则不等式 $f(x-2) + f(x^2-4) < 0$ 的解集为
A. $(-1, 6)$ B. $(-6, 1)$ C. $(-2, 3)$ D. $(-3, 2)$
- $\triangle AOB$ 中， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} - \vec{b}| = 2$ ，则 $\triangle AOB$ 的面积的最大值为
A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a(x+1), & (1 < x < 1) \\ f(2-x) + a - 1, & (1 < x < 3) \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，若 $x_1 \neq x_2$ ，且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $x_1 + x_2$ 的值
A. 恒小于 2 B. 恒大于 2 C. 恒等于 2 D. 以上都不对

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cdot \cos^2(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{4}) - \sin^2 \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{5}, \frac{5\pi}{6}]$ 上是增函数, 且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值 1, 则 ω 的取值范围是

- A. $(0, \frac{3}{5}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

12. 已知对任意实数 x 都有 $f'(x) = 2e^x + f(x), f(0) = -1$, 若不等式 $f(x) < a(x-1)$ (其中 $a < 1$) 的解集中恰有两个整数, 则 a 的取值范围是

- A. $[\frac{3}{2e}, 1)$ B. $[-\frac{3}{2e}, 1)$ C. $[\frac{5}{3e^2}, \frac{3}{2e})$ D. $[\frac{5}{3e^2}, 1)$

二、填空题(本大题共 4 个小题, 共 20 分)

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = 3x + y$ 最小值为_____.

14. 非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $2|\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

15. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 在区间 $(\frac{17\pi}{3}, a)$ 上是单调函数, 则实数 a 的最大值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, g(x) = e^{x-2}$, 若 $\forall m \in R, \exists n \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x) = f(n)$ 成立, 则的最小值是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = 3n + 5, n = 1, 2, 3, \dots$

证明: $a_{n+1} - a_{n-1} = 3, n = 1, 2, 3, \dots$;

(2) 求和: $a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_4 - a_4 a_5 + \dots + a_{2n-1} a_{2n} - a_{2n} a_{2n+1}$.

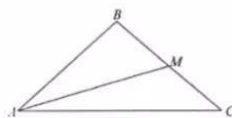
18. (本小题满分 12 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, M 是边 BC 的中点,

$$\cos \angle BAM = \frac{5\sqrt{7}}{14}, \cos \angle AMC = -\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

(1) 求 $\angle B$ 的大小;

(2) 若 $AM = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

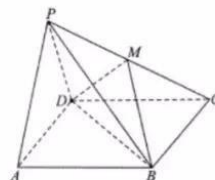


19. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $PB \perp AD$, $\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 是菱形, 点 M 为 PC 的中点.

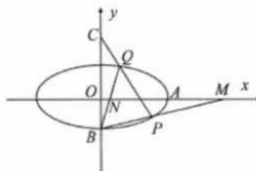
(1) 求证: $PA \parallel$ 平面 MDB ;

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其右顶点为 A ,



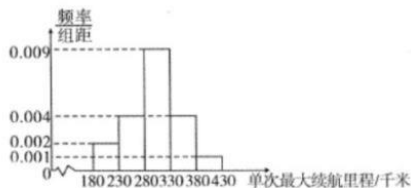
下顶点为定点 $C(0, 2)$, ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 过点 C 作与 y 轴不重合的直线 l 交椭圆 C 于

P, Q 两点, 直线 BP, BQ 分别与 x 轴交于 M, N 两点.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 试探究 M, N 的横坐标的乘积是否为定值, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

某汽车公司最近研发了一款新能源汽车, 并在出厂前对 100 辆汽车进行了单次最大续航里程的测试. 现对测试数据进行分析, 得到如图所示的频率分布直方图:



(1) 估计这 100 辆汽车的单次最大续航里程的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值代表).

(2) 根据大量的汽车测试数据, 可以认为这款汽车的单次最大续航里程 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 经计算第(1)问中样本标准差 s 的近似值为 50. 用样本平均数 5 作为 μ 的近似值, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值, 现任取一辆汽车, 求它的单次最大续航里程恰在 250 千米到 400 千米之间的概率.

参考数据: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,
 $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$, $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$.

(3) 某汽车销售公司为推广此款新能源汽车, 现面向意向客户推出“玩游戏, 送大奖”活动, 客户可根据抛掷硬币的结果, 操控微型遥控车在方格图上行进, 若遥控车最终停在“胜利大本营”, 则可获得购车优惠券 3 万元. 已知硬币出现正、反面的概率都是 0.5, 方格图上标有第 0 格、第 1 格、第 2 格、……、第 20 格. 遥控车开始在第 0 格, 客户每掷一次硬币, 遥控车向前移动一次. 若掷出正面, 遥控车向前移动一格(从 k 到 $k+1$), 若掷出反面, 遥控车向前移动两格(从 k 到 $k+2$), 直到遥控车移到第 19 格(胜利大本营)或第 20 格(失败大本营)时, 游戏结束. 设遥控车移到第 $n(1 < n < 19)$ 格的概率为 P_n , 试证明 $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是等比数列, 并求参与游戏一次的顾客获得优惠券金额的期望值.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.

- (1) 判断函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上零点的个数;
- (2) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的极值点从小到大分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$, 证明:
 - (i) $f(x_1) + f(x_2) < 0$;
 - (ii) 对一切 $n \in N^*$, $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n) < 0$ 成立.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），[点击链接](http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html)获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>