2023年河南省五市高三第一次联合调研检测
数学理科参考答案

一、选择题

1-5　ABDBC　6-10　DCCCD　11-12　DA

二、填空题

13.$-x^5$　　14.$\sqrt{7}$　　15.$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$　　16.0

三、解答题

17. 解：(1)已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_n=2^{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$，

$n=1$ 时，$a_1=S_1=2^2-1=3$，…………………………………………………… 1分

$n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-1)-(2^n-1)=2^n$，

经验证 $n=1$ 时，$a_1=3\neq2^1$，$\therefore a_n=\begin{cases}3,n=1\\2^n,n\geqslant2\end{cases}$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$；……………………… 5分

(2)证明：若 $b_n=\frac{2^{n+1}}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，$T_n$ 是$\{b_n\}$的前 n 项和，

$n=1$ 时，$T_1=\frac{2}{3}<\frac{4}{3}$，…………………………………………………… 6分

$n\geqslant2$ 时，$b_n=\frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=2(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})$ ……………………………… 9分

$T_n=\frac{2}{3}+2(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\frac{1}{2^3-1}-\frac{1}{2^4-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})=\frac{4}{3}-\frac{2}{2^{n+1}-1}<\frac{4}{3}$

$\therefore T_n<\frac{4}{3}$. ………………………………………………………………… 12分

18. 解：(1)证明：取 BP 中点 M，连接 AM,CM，$\because AD=2AB$，P 为 AD 的中点，

$\therefore AB=AP$，$\therefore AM\perp BP$，$\because\triangle BCP$ 为等边三角形，$\therefore CM\perp BP$，

$\because AM\cap CM=M$，$AM,CM\subset$面 ACM，$\therefore BP\perp$平面 ACM，

$\because$平面 $ACM\cap$平面 $ABP=AM$，$\therefore$直线 AC 在平面 ABP 的射影在直线 AM 上，

$\therefore$直线 AC 与平面 $ABED$ 所成角为$\angle CAM$，则$\angle CAM=\frac{\pi}{4}$，

$\because AB=AP=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\triangle ABP$ 是正三角形，则 $AM=\sqrt{3}$，$BP=2$，

$\because\triangle BCP$ 为等边三角形，$BP=2$，则 $CM=\sqrt{3}$，$\therefore$在$\triangle AMC$ 中，由 $AM=CM=\sqrt{3}$，$\angle CAM=\frac{\pi}{4}$，得$\angle ACM=\frac{\pi}{4}$，则$\angle CMA=\frac{\pi}{2}$，$\therefore AM\perp CM$，$\because CM\perp BP$，$AM\cap BP=M$，AM，$BP\subset$平面 $ABED$，

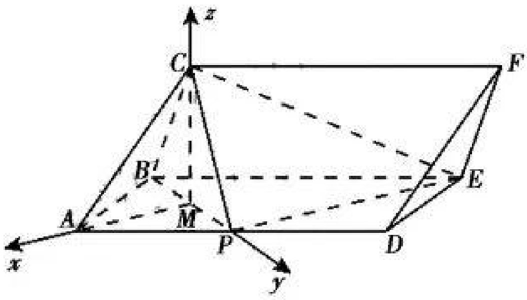
$\therefore CM\perp$平面 $ABED$，$\because PE\subset$平面 $ABED$，$\therefore CM\perp PE$，$\because BP=2$，在$\triangle PDE$ 中，$PD=$

$ED=2$，$\angle PDE=\dfrac{2}{3}\pi$，$\therefore PE=2\sqrt{3}$，又 $BE=4$，$\therefore BP^2+PE^2=BE^2$，$\therefore PE\perp BP$，

$\because CM\cap BP=M$，$\therefore PE\perp$平面 BCP. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 MP,MC,MA 两两垂直，以 M 为坐标原点，

MA 所在直线为 x 轴，MP 所在直线为 y 轴，MC 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，………………………………………………………………………… 7 分



则 $C(0,0,\sqrt{3})$，$P(0,1,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-1,0)$，

$\because P$ 是 AD 的中点，$\therefore D(-\sqrt{3},2,0)$，$\because \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{ED}$，$\therefore E(-2\sqrt{3},1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PC}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=(-2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{PD}=(-\sqrt{3},1,0)$，

设平面 ECP 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=-y+\sqrt{3}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=-2\sqrt{3}x=0\end{cases}$，令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$， ………………………… 9 分

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=-b+\sqrt{3}c=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=-\sqrt{3}a+b=0\end{cases}$，取 $a=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$， ………………………… 11 分

设平面 ECP 与平面 CDP 所成锐二面角的平面角为 θ，

则平面 ECP 与平面 CDP 所成锐二面角的余弦值为：

$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………… 12 分

19.解：(1)令 Y 表示 1000 袋牛肉干中变质牛肉干的数量，

由题意有 $Y\sim B(1000,p)$，则 $E(Y)=1000p$，

故 $E(X)=(1000-1000p)(50-30)-1000p\times(30+50\times3)=20000-200000p$，

由 $7500<E(X)<10000$，有 $7500<20000-200000p<10000$，解得：$\dfrac{1}{20}<p<\dfrac{1}{16}$，

故当 $7500<E(X)<10000$ 时，p 的取值范围为 $\dfrac{1}{20}<p<\dfrac{1}{16}$. ………………………… 6 分

(2)对这批牛肉干来说，变质牛肉干不管数量有多少，未变质牛肉干的销售后产生的利润与变质牛肉干作废物处理后产生的费用是不变的，是否聘请兼职员工来检查这批牛肉干，产生的费用是工资和给消费者赔付的费用，当 $p=\dfrac{1}{20}$时，由(1)知，

$E(Y)=1000\times\frac{1}{20}=50$,

设需要赔付给消费者的费用为 Z 元,有 $E(Z)=50\times3\times50=7500$,由 $7500>5000$,以超市获取的利润为决策依据,故超市需要聘请兼职员工来检验这批牛肉干是否变质. ………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)当 P 点在 x 轴上时,$P(2,0)$,PA:$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$,

于是得:$\begin{cases}y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)\\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2})x^2-2x+1=0$,由 $\Delta=0$ 得 $a^2=2$,

故椭圆方程为:$\frac{x^2}{2}+y^2=1$; ………………………………………………… 4 分

(2)设切线为 $y=kx+m$,设 $P(2,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,

则 $\begin{cases}y=kx+m\\ x^2+2y^2-2=0\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2-4kmx+2m^2-2=0$ 由 $\Delta=0$ 得 $m^2=2k^2+1$, …… 6 分

且 $x_1=\frac{-2km}{1+2k^2}$,$y_1=\frac{m}{1+2k^2}$,$y_0=2k+m$ 则 $|PO|=\sqrt{y_0^2+4}$.

直线 PO 为:$y=\frac{y_0}{2}x\Rightarrow$点 A 到直线 PO 距离 $d=\frac{|y_0x_1-2y_1|}{\sqrt{y_0^2+4}}$, ………………… 8 分

则 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}|PO|\cdot d=\frac{1}{2}|y_0x_1-2y_1|=\frac{1}{2}\left|(2k+m)\frac{-2km}{1+2k^2}-\frac{2m}{1+2k^2}\right|$

$=\left|\frac{1+2k^2+km}{1+2k^2}m\right|=|k+m|$. ……………………………………………… 10 分

当 $m=\sqrt{2k^2+1}$ 时,$S=|k+\sqrt{1+2k^2}|$.

$(S-k)^2=1+2k^2\Rightarrow k^2+2Sk-S^2+1=0$,

因为 $\Delta=8S^2-4\geqslant0\Rightarrow S\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

同理当 $m=-\sqrt{2k^2+1}$ 时,可得 $S\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以$\triangle POA$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………… 12 分

21.解:(1)由 $f(x)=\frac{\sin x}{e^{\pi}}-\frac{a}{e^x}\geqslant0$ 可得 $e^x\sin x-ae^{\pi}\geqslant0$,即 $ae^{\pi}\leqslant e^x\sin x$,令 $m(x)=e^x\sin x$, ……………………………………………………………………… 2 分

$m'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$，当 $x\in(-\pi,0)$ 时，

令 $m'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x\geqslant 0$，得 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 0$，

$m'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x\leqslant 0$，得 $-\pi\leqslant x\leqslant -\dfrac{\pi}{4}$

所以 $m(x)$ 在 $[-\pi,-\dfrac{\pi}{4}]$ 上为减函数，在 $[-\dfrac{\pi}{4},0]$ 上为增函数，

故 $m(x)_{\min}=m(-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$ae^{\pi}\leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

综上 $a\leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$ ………………………………………………………… 5 分

(2) 由 $f(x)=-\dfrac{1}{e^{\pi}}$，得 $\sin x-e^{\pi-x}+1=0$，等价于 $e^{x-\pi}(\sin x+1)=1$

令 $g(x)=e^{x-\pi}(\sin x+1)-1$，$g'(x)=e^{x-\pi}(\sin x+\cos x+1)$ ……………………… 7 分

在 $[(2k+1)\pi,(2k+\dfrac{3}{2})\pi]$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

在 $[(2k+\dfrac{3}{2})\pi,(2k+2)\pi]$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增

注意到 $g((2k+1)\pi)=e^{2k\pi}-1>0$，$g((2k+2)\pi)=e^{\pi+2k\pi}-1>0$，$g[(2k+\dfrac{3}{2})\pi]=-1<0$

$\therefore g(x)$ 在 $((2k+1)\pi,(2k+\dfrac{3}{2})\pi)$ 和 $((2k+\dfrac{3}{2})\pi,(2k+2)\pi)$ 上各有一个零点 x_1，x_2，$g(x)$ 共有两个零点.故方程 $f(x)=-\dfrac{1}{e^{\pi}}$ 有两个实数根. ……………………… 12 分

22. 解：(1) 曲线 T 的极坐标方程 $\rho=\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ 变形为 $\rho^2\sin^2\theta=\rho\cos\theta\Rightarrow y^2=x$，

$l_1:\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），$l_2:\begin{cases}x=1-t\sin\alpha\\ y=t\cos\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）. ……………………… 5 分

(2) 将 $l_1:\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），代入 $y^2=x$，得 $t^2\sin^2\alpha-t\cos\alpha-1=0$，

则 $t_M=\dfrac{t_A+t_B}{2}=\dfrac{\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$，同理 $t_N=\dfrac{-\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}$ ……………………………………… 7 分

$|MN|=\sqrt{|FM|^2+|FN|^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\cos\alpha\sin\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha}}\geqslant 1$，

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得等号，且此时满足方程的判别式均大于零。故 $|MN|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$ ………………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)$f(x)=|x+2|+|2x-3|=\begin{cases}3x-1,x>\dfrac{3}{2}\\ 5-x,-2\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\\ -3x+1,x<-2\end{cases}$ ………………………… 2 分

即$\begin{cases}3x-1>6\\ x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$，或$\begin{cases}5-x>6\\ -2\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}$，或$\begin{cases}-3x+1>6,\\ x<-2,\end{cases}$解得或 $x>\dfrac{7}{3}$ 或 $x<-1$，所以原不等式的解集为$\{x|x>\dfrac{7}{3}$ 或 $x<-1\}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)证明：由(1)知当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 有最小值$\dfrac{7}{2}$，

所以 $m=\dfrac{7}{2}$，$a^2+\dfrac{b^2}{9}=\dfrac{7}{2}$. 因为，$(\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b})^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{6}{ab}$，

所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{6}{ab}=\dfrac{2}{7}(a^2+\dfrac{b^2}{9})(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{6}{ab})=\dfrac{2}{7}(2+\dfrac{b^2}{9a^2}+\dfrac{6a}{b}+\dfrac{2b}{3a}+\dfrac{9a^2}{b^2})$. ………… 7 分

因为$\dfrac{9a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{9a^2}\geqslant 2$，$\dfrac{6a}{b}+\dfrac{2b}{3a}\geqslant 4$，当且仅当 $b=3a$ 时取等号，

所以$(\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b})^2\geqslant\dfrac{16}{7}$，当且仅当 $b=3a$ 时取等号，

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}\geqslant\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$，当且仅当 $a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ 时取等号. ……………………… 10 分

方法二 $f(x)=|x+2|+|x-\dfrac{3}{2}|+|x-\dfrac{3}{2}|\geqslant|2+\dfrac{3}{2}|+0=\dfrac{7}{2}$

仅当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时等号成立，所以 $m=\dfrac{7}{2}$，$a^2+\dfrac{b^2}{9}=\dfrac{7}{2}$. ……………………………… 7 分

$\therefore\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\frac{b}{3}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{a^2+\frac{b^2}{9}}{2}}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

当且仅当$\begin{cases}a=\dfrac{b}{3}\\ a^2+\dfrac{b^2}{9}=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\\ b=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\end{cases}$时等号成立. ……………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。