高三年级考试
数学试卷参考答案

1. B　∵$M=\{x|(x-1)(x-3)\leqslant 0\}=[1,3]$，∴$M\cap N=(2,3]$.

2. A　“$\exists x\in\mathbf{Q},\sin x^2\in\mathbf{Q}$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{Q},\sin x^2\notin\mathbf{Q}$”.

3. C　依题意可得 $4=(\sqrt{2})^{\alpha}$，解得 $\alpha=4$.

4. D　因为 $y'=4t^3-1$，所以当 $t=2$ 时，$y'=31$，该质点的瞬时速度为 31 m/s.

5. D　由 $f(x)$为奇函数，得 $f(-x)+f(x)=\frac{x^6e^{-2x}}{e^{-mx}-1}-3x+\frac{x^6e^{2x}}{e^{mx}-1}+3x=-\frac{x^6e^{(m-2)x}}{e^{mx}-1}+\frac{x^6e^{2x}}{e^{mx}-1}$ $=0$. 因为 x 不恒为 0，所以 $-e^{(m-2)x}+e^{2x}=0$，即 $e^{(m-2)x}=e^{2x}$，所以 $m-2=2$，即 $m=4$.

6. C　因为 a,b 均为正数，所以 $a^2+ab+4b^2=3\geqslant ab+2\sqrt{a^2\times 4b^2}=5ab$，当且仅当 $a^2=4b^2$，即 $a=2b=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$时，等号成立，所以 $ab\leqslant\frac{3}{5}$，ab 的最大值为$\frac{3}{5}$.

7. B　$\lg m>0$ 等价于 $m>1$. 若 $m=2$，则方程$(m-1)x^2+y^2=m-1$ 表示单位圆. 若方程$(m-1)x^2+y^2=m-1$ 表示椭圆，则椭圆方程可化为 $x^2+\frac{y^2}{m-1}=1$，则 $m>1$ 且 $m\neq 2$. 故“$\lg m>0$”是“方程$(m-1)x^2+y^2=m-1$ 表示椭圆”的必要不充分条件.

8. A　令 $x=y=1$，得 $f(2)=2f(1)+1$；
令 $x=1,y=2$，得 $f(3)=f(1)+f(2)+3$；
令 $x=1,y=3$，得 $f(4)=f(1)+f(3)+5$.
将以上三式相加得 $f(4)=4f(1)+9$，即 $f(4)-4f(1)=9$.

9. AB　$0\in\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，“六边形的内角和为 720°”是全称量词命题，“每个水分子都由两个氢原子和一个氧原子构成”是全称量词命题.

10. ACD　因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $y=-x$ 是减函数，所以 $y=f(-x)$为增函数，$y=f(x)-f(-x)$是减函数，A 正确，B 错误. 因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(1)=0$，所以 $f(x^2-1)=0$ 等价于 $x^2-1=1$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$，所以 $y=f(x^2-1)$的零点之积为-2，C 正确. 依题意$(x-2)\cdot f(x)\geqslant 0$ 等价于$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}x-2\leqslant 0,\\ f(x)\leqslant 0,\end{cases}$解得 $x\in[1,2]$，D 正确.

11. ABD　若 $m_2<m_1$，则 $m_2-m_1=-2.5\lg\frac{E_2}{E_1}<0$，则 $\lg\frac{E_2}{E_1}>0$，所以$\frac{E_2}{E_1}>1$，因为 $E_1>0$，所以 $E_2>E_1$，所以星等值越小，星星就越亮，A 正确. 当 $m_2=6$，$m_1=1$ 时，$5=-2.5\lg\frac{E_2}{E_1}$，则$\frac{E_1}{E_2}=100$，B 正确.

若 $m_2-m_1=-2.5\lg\frac{E_2}{E_1}<2.5$，则 $\lg\frac{E_2}{E_1}>-1$，即$\frac{E_2}{E_1}>10^{-1}$，C 错误. 若 $m_2-m_1=-2.5\lg\frac{E_2}{E_1}$

>10，则 $\lg \frac{E_2}{E_1}<-4$，即$\frac{E_2}{E_1}<10^{-4}$，D 正确.

12. CD　由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<3x^2$，得$[f(x)g(x)]'<(x^3)'$.

设函数 $h(x)=f(x)g(x)-x^3$，则 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-3x^2<0$.

所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以 $h(1)>h(2)$，即 $f(1)g(1)-1^3>f(2)g(2)-2^3$.

则 $f(2)g(2)-f(1)g(1)<7$. 故 $f(2)g(2)-f(1)g(1)$的值可能为 5，6.

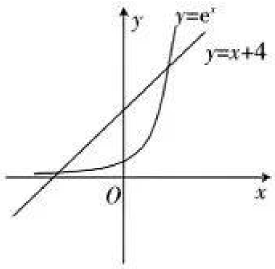
13. -24　$f(-3)=-3f(3)=-3\times(5\times3-7)=-24$.

14. 1　$(x^2+1)(\frac{1}{x^2}+4)=1+4+4x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant5+2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=9$，当且仅当 $4x^2=\frac{1}{x^2}$，

即 $x^2=\frac{1}{4}$时，等号成立，所以 $\log_9(x^2+1)+\log_9(\frac{1}{x^2}+4)=\log_9[(x^2+1)(\frac{1}{x^2}+1)]\geqslant\log_9 9=$

1，故 $\log_9(x^2+1)+\log_9(\frac{1}{x^2}+4)$的最小值为 1.

15. 2　$f'(x)=x+4-e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x+4=e^x$，作出 $y=x+4$ 与 $y=e^x$ 的图象，如图所示，由图可知这两个函数图象有两个交点，设交点的横坐标为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$. 当 $x<x_1$ 时，$f'(x)=x+4-e^x<0$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)=x+4-e^x>0$；当 $x>x_2$ 时，$f'(x)=x+4-e^x<0$. 所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-e^x$ 有 2 个极值点.



16. $(\frac{65}{3},22]$　由 $x^2-2ax-3a^2\geqslant 0$，得 $(x+a)(x-3a)\geqslant 0$，因为 a 为正数，所以 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant 3a$. 当 $a=23$ 时，$\{x|x\leqslant -a\}\cap\{x|-24<x<100\}=\{-23\}$，$\{x|x\geqslant 3a\}\cap\{x|-24<x<100\}=\{69,70,\cdots,99\}$，此时不等式组的整数解的个数为 32；当 $a=22$ 时，$\{x|x\leqslant -a\}\cap\{x|-24<x<100\}=\{-22,-23\}$，$\{x|x\geqslant 3a\}\cap\{x|-24<x<100\}=\{66,67,\cdots,99\}$，此时不等式组的整数解的个数为 36. 当 $a=21$ 时，$\{x|x\leqslant -a\}\cap\{x|-24<x<100\}=\{-21,-22,-23\}$，$\{x|x\geqslant 3a\}\cap\{x|-24<x<100\}=\{63,64,\cdots,99\}$，此时不等式组的整数解的个数为 40. a 越大，则 $-a$ 越小，$3a$ 越大，从而不等式组 $\begin{cases}-24<x<100,\\x^2-2ax-3a^2\geqslant 0\end{cases}$ 的整数解的个数不会增加；a 越小，则 $-a$ 越大，$3a$ 越小，从而不等式组 $\begin{cases}-24<x<100,\\x^2-2ax-3a^2\geqslant 0\end{cases}$ 的整数解的个数不会减少.

要使得不等式组的整数解的个数为 36，则需满足 $\begin{cases}-22\leqslant -a<-21,\\65<3a\leqslant 66,\end{cases}$ 解得 $\frac{65}{3}<a\leqslant 22$.

17. 解：(1)当 $m=1$ 时，$B=\{x|1<x<10\}$，…………………………………………………… 1 分

则 $A\cup B=\{x|1\leqslant x\leqslant 10\}$，…………………………………………………………… 3 分

$A\cap(\complement_R C)=\{1,7,10\}$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $B\cap C=C$，所以 $C\subseteq B$. ………………………………………………………… 6 分

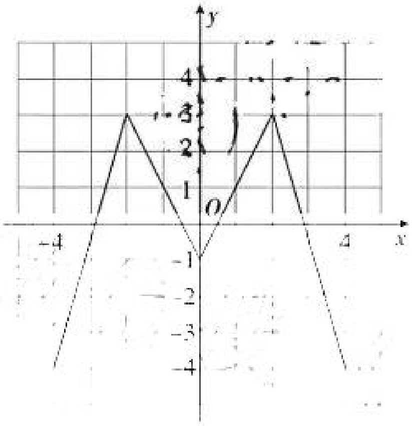
因为 $m<m+9$,所以 $B\neq\varnothing$, ………………………………………………………… 7 分

则 $\begin{cases}m<3,\\ m+9>6,\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 9 分

解得 $-3<m<3$,故 m 的取值范围为 $(-3,3)$. ………………………………………… 10 分

【注】考生得到 $-3<m<3$,但未写"m 的取值范围为 $(-3,3)$",不扣分.

18. 解:(1)在答题卡中作出 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的图象,如图所示.



………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由 $g(x)=0$,得 $f(x)=\log_2 5$. ………………………………………………………… 7 分

因为 $2<\log_2 5<3$, …………………………………………………………………………… 9 分

所以直线 $y=\log_2 5$ 与 $f(x)$ 的图象有 4 个公共点, ……………………………………… 11 分

所以 $g(x)$ 零点的个数为 4. ……………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)因为 $a=-7$,所以 $f(x)=x^3+3x^2+7x$,则 $f(-1)=-1+3-7=-5$. ……… 1 分

由 $f'(x)=3x^2+6x+7$, …………………………………………………………………… 2 分

得 $f'(-1)=3-6+7=4$, …………………………………………………………………… 3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y-(-5)=4[x-(-1)]$,

即 $y=4x-1$(或 $4x-y-1=0$). ……………………………………………………………… 5 分

(2)(方法一)因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f'(x)=3x^2+6x-a\geqslant 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立, ……………………………………………………………………………… 7 分

即 $a\leqslant 3x^2+6x$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立. ……………………………………………… 8 分

因为 $g(x)=3x^2+6x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, ………………………………………… 9 分

所以 $g(x)=3x^2+6x$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $g(1)=9$, ……………………………… 10 分

所以 $g(x)=3x^2+6x$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $g(1)=9$. ······························ 10 分

所以 $a\leqslant 9$，故 a 的取值范围为 $(-\infty,9]$. ·· 12 分

（方法二）因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=3x^2+6x-a\geqslant 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立. ·· 7 分

因为 $f'(x)=3x^2+6x-a$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，······································ 9 分

所以 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f'(1)=9-a$，······································ 10 分

所以 $9-a\geqslant 0$. ·· 11 分

即 $a\leqslant 9$，故 a 的取值范围为 $(-\infty,9]$. ·· 12 分

20. 解：(1)设该三棱柱形实木块的高为 h cm，则由该三棱柱形实木块的所有棱长之和为 60 cm，

得 $6x+3h=60$，即 $2x+h=20$， …………………………………………………… 2 分

则 $h=20-2x$. ………………………………………………………………………… 3 分

由 $\begin{cases} x>0, \\ h>0, \end{cases}$ 得 $0<x<10$， ………………………………………………………… 4 分

所以 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(20-2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(10x^2-x^3)(0<x<10)$. ………………… 6 分

(2)设 $V(x)=V=\frac{\sqrt{3}}{2}(10x^2-x^3)(0<x<10)$，

则 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(20-3x)$. ……………………………………………………… 7 分

当 $0<x<\frac{20}{3}$ 时，$V'(x)>0$；当 $\frac{20}{3}<x<10$ 时，$V'(x)<0$. ………………………… 9 分

所以 $V(x)$ 在 $(0,\frac{20}{3})$ 上单调递增，在 $(\frac{20}{3},10)$ 上单调递减， ………………………… 10 分

所以 $V(x)_{\max}=V(\frac{20}{3})=\frac{2000\sqrt{3}}{27}$ ……………………………………………… 11 分

故该三棱柱形实木块体积的最大值为 $\frac{2000\sqrt{3}}{27}\ cm^3$. ……………………………… 12 分

21.(1)解：由 $\begin{cases} 4-x\geq 0, \\ x-1\geq 0, \end{cases}$ ……………………………………………………… 1 分

得 $1\leqslant x\leqslant 4$. ………………………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$. ………………………………………………………… 3 分

(2)证明：$[f(x)]^2=4-x+x-1+2\sqrt{(4-x)(x-1)}=3+2\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}$. …… 5 分

因为 $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1}\geq 0$，所以 $f(x)=\sqrt{3+2\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}}$. ………… 6 分

当 $1\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$ 时，$f(x)$ 单调递增；当 $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)$ 单调递减. ……………… 7 分

先证明充分性.

若 $\frac{3}{2}<a\leqslant 3$，则 $\frac{5}{2}<a+1\leqslant 4$， ……………………………………………… 8 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上存在最大值，且最大值为 $f(\frac{5}{2})$ 或 $f(a)$，所以充分性成立. …

……………………………………………………………………………………………… 9 分

再证明必要性.

若 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上存在最大值，则 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上可能先增后减，还可能单调递减， ………………………………………………………………………………… 10 分

则 $\frac{5}{2}\in[a,a+1)$ 或 $a\geqslant\frac{5}{2}$，又 $[a,a+1)\subseteq[1,4]$，所以 $\frac{3}{2}<a\leqslant 3$，所以必要性成立. … 11 分

综上，$f(x)$在区间$[a,a+1]$上存在最大值的充要条件是$\frac{3}{2}<a\leqslant 3$. ………………………… 12 分

22.(1)解：$f'(x)=ae^x-b$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln\frac{b}{a}(a>0,b>0)$. ………………………… 1 分

当 $x\in(-\infty,\ln\frac{b}{a})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减； ………………………… 2 分

当 $x\in(\ln\frac{b}{a},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. ………………………… 3 分

所以 $f(x)$在 $x=\ln\frac{b}{a}$处取得极小值，且极小值为 $f(\ln\frac{b}{a})=b-b\ln\frac{b}{a}$，$f(x)$无极大值. ………………………… 5 分

(2)证明：当 $a=4,b=3$ 时，$f(x)>x\ln x$ 等价于 $4e^x>x\ln x+3x(x>0)$，

$4e^x>x\ln x+3x$ 等价于$\frac{e^x}{x^2}>\frac{\ln x+3}{4x}(x>0)$. ………………………… 7 分

令函数 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$，

当 $x\in(0,2)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减；当 $x\in(2,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增. ………………………… 8 分

所以$\varphi(x)$的最小值为$\varphi(2)$，则 $\varphi(x)\geqslant\varphi(2)=\frac{e^2}{4}$. ………………………… 9 分

令函数 $u(x)=\frac{\ln x+3}{4x}$，则 $u'(x)=\frac{-2-\ln x}{4x^2}$，令 $u'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e^2}$.

当 $x\in(0,\frac{1}{e^2})$时，$u'(x)>0$，$u(x)$单调递增；当 $x\in(\frac{1}{e^2},+\infty)$时，$u'(x)<0$，$u(x)$单调递减. ………………………… 10 分

所以 $u(x)$的最大值为 $u(\frac{1}{e^2})$，则 $u(x)\leqslant u(\frac{1}{e^2})=\frac{e^2}{4}$. ………………………… 11 分

因为 $\varphi(x)_{\min}=u(x)_{\max}$，且这两个函数取得最值时对应的自变量不相等，所以 $\varphi(x)>u(x)$对 $x\in(0,+\infty)$恒成立，从而 $f(x)>x\ln x$ 得证. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线