

保密★启用前

准考证号_____姓名_____

(在此卷上答题无效)

三明市 2023 年普通高中高三毕业班质量检测

数 学 试 题

本试卷共 5 页，满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、准考证号。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答。在试题卷上作答，答案无效。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 3\}$ ， $B = \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 2, 5, 8\}$ B. $\{-1, 2, 5\}$ C. $\{2, 5, 8\}$ D. $\{2, 5\}$
2. 复数 z 的共轭复数为 \bar{z} ， $(1+i)z = 2i$ (i 为虚数单位)，则 $z \cdot \bar{z} =$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
3. 若向量 a, b 满足 $a = (2, 1)$ ， a 与 $a + b$ 垂直，则 b 在 a 上的投影向量为
A. $(-2, -1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ D. $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$
4. 17 世纪，法国数学家马林·梅森在欧几里得、费马等人研究的基础上，对 $2^p - 1$ (p 为素数) 型的数作了大量的研算，他在著作《物理数学随感》中预言：在 $p \leq 257$ 的素数中，当 $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ 时， $2^p - 1$ 是素数，其它都

数学试题 第 1 页 (共 6 页)

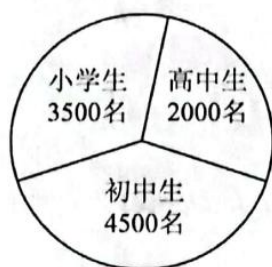
是合数，除了 $p=67$ 和 $p=257$ 两个数被后人证明不是素数外，其余都已被证实。人们为了纪念梅森在 2^p-1 型素数研究中所做的开创性工作，就把 2^p-1 型的素数称为“梅森素数”，记为 $M_p=2^p-1$ 。几千年来，人类仅发现 51 个梅森素数，由于这种素数珍奇而迷人，因此被人们誉为“数海明珠”。已知第 7 个梅森素数 $M_{19}=2^{19}-1$ ，第 8 个梅森素数 $M_{31}=2^{31}-1$ ，则 $\lg \frac{1+M_{31}}{1+M_{19}}$ 约等于（参考数据： $\lg 5 \approx 0.7$ ）

则 $\lg \frac{1+M_{31}}{1+M_{19}}$ 约等于（参考数据： $\lg 5 \approx 0.7$ ）

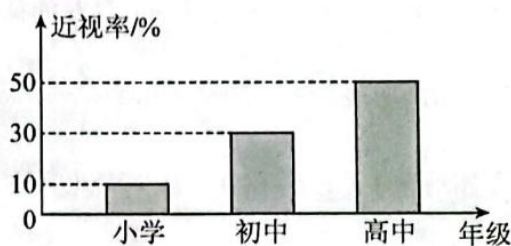
- A. 17.1 B. 8.4 C. 6.6 D. 3.6
5. 某社会实践小组需要对一个实心圆锥形工件进行加工，该工件底面半径为 10cm ，高为 8cm ，加工方法为挖掉一个与该圆锥形工件同底面共圆心的内接圆柱，若要求加工后工件的质量最轻，则圆柱的半径应设计为
- A. $\frac{20}{3}\text{cm}$ B. $\frac{10}{3}\text{cm}$ C. 3cm D. $\frac{5}{3}\text{cm}$
6. 角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边不在坐标轴上，终边所在的直线与圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=8$ 相交于 A, B 两点，当 $\triangle ABC$ 面积最大时 $\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)=$
- A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{24}{25}$
7. 设抛物线焦点为 F ，准线与对称轴交于点 E ，过 F 的直线交抛物线于 A, B 两点，对称轴上一点 C 满足 $\overline{CA}=3\overline{BE}$ ，若 $\triangle ACF$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ，则 F 到抛物线准线的距离为
- A. $\sqrt{6}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
8. 已知函数 $f(x)=\log_2(4^x+4)-x-1$ ，设 $a=f(\frac{19}{10})$ ， $b=f(\tan\frac{1}{10})$ ， $c=f(\ln\frac{11}{10})$ ，则 a, b, c 的大小关系为
- A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有错选的得 0 分。

9. 已知某地区中小學生人数如图①所示，为了解该地区中小學生的近视情况，卫生部门根据当地中小學生人数，用分层抽样的方法抽取了10%的學生进行视力调查，调查数据如图②所示，下列说法正确的有



图①



图②

- A. 该地区的中小學生中，高中生占比为20%
 B. 抽取调查的高中生人数为200人
 C. 该地区近视的中小學生中，高中生占比超过40%
 D. 从该地区的中小學生中任取3名學生，记近视人数为 ξ ，则 ξ 的数学期望约为0.81
10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，前 n 项积为 T_n ，若满足 $0 < a_1 < 1$ ， $a_7 \cdot a_{4040} > 1$ ，

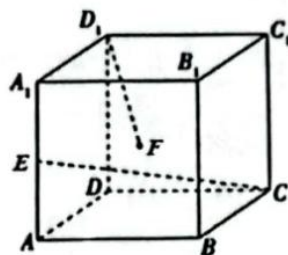
$(a_{2023} - 1)(a_{2024} - 1) < 0$ ，则下列选项正确的是

- A. $\{a_n\}$ 为递减数列
 B. $S_{2023} + 1 < S_{2024}$
 C. 当 $n = 2023$ 时， T_n 最小
 D. 当 $T_n > 1$ 时， n 的最小值为4047
11. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\varphi}{2})\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\omega x$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$)的图象与直线 $y = 1$

的相邻两个交点的距离为 π ，且对于任意 $x \in (\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3})$ ，不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立，则

- A. $\omega = 2$
 B. φ 的取值范围为 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$
 C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
 D. 若实数 m 使得方程 $f(x) - m = 0$ 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 恰有 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$)三个实数根，则 $x_1 + 2x_2 + x_3$ 的最小值为 $\frac{4\pi}{3}$

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 E 是 AA_1 的中点, 点 F 是侧面 ABB_1A_1 内一动点, 则下列结论正确的为



- A. 当 F 在 A_1B 上时, 三棱锥 $F-CD_1E$ 的体积为定值
- B. CE 与 BF 所成角正弦的最小值为 $\frac{2}{3}$
- C. 过 D_1 作垂直于 CE 的平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形的周长为 $6\sqrt{2}$
- D. 当 $D_1F \perp CE$ 时, $\triangle BCF$ 面积的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 n 为一组从小到大排列的数 1, 2, 3, 5, 6, 8 的第六十百分位数, 则 $(2x-y+1)^n$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为_____.

14. 在平面直角坐标系中, $O(0,0)$, $A(\sin \alpha, \cos \alpha)$, $B(\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}))$, 当 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ 时, 写出 α 的一个值为_____.

15. 古希腊数学家托勒密在他的名著《数学汇编》里给出了托勒密定理, 即任意凸四边形中, 两条对角线的乘积小于等于两组对边的乘积之和, 当且仅当凸四边形的四个顶点同在一个圆上时等号成立. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 双曲线上关于原点对称的两点 A, B 满足 $|AB| \cdot |F_1F_2| = |AF_1| \cdot |BF_2| + |AF_2| \cdot |BF_1|$, 若 $\angle AF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$, 则双曲线的离心率为_____.

16. 已知不等式 $x - a \ln x - a - 2b \geq 3$ 恒成立, 其中 $a \neq 0$, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值为_____.

数学试题 第 4 页 (共 6 页)

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $b=2, a^2=c^2+2c+4$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 $D, CD=\sqrt{6}$ 。

- (1) 求 $\angle ADC$ ；
- (2) 求 $\triangle BCD$ 的面积。

18. (12 分)

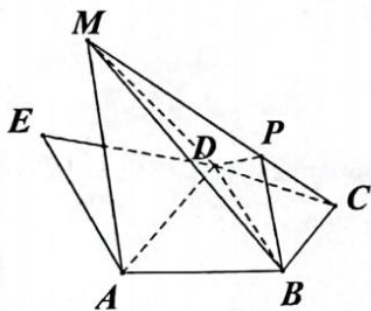
已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, 2a_{n+1}+a_n a_{n+1}-2a_n=0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = (-1)^n \frac{8}{(4n^2-1)a_n}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，证明： $-1 < S_{2n} \leq -\frac{4}{5}$ 。

19. (12 分)

如图，平面五边形 $ABCDE$ 由等边三角形 ADE 与直角梯形 $ABCD$ 组成，其中 $AD \parallel BC, AD \perp DC, AD=2BC=2, CD=\sqrt{3}$ ，将 $\triangle ADE$ 沿 AD 折起，使点 E 到达点 M 的位置，且 $BM=a$ 。



- (1) 当 $a=\sqrt{6}$ 时，证明 $AD \perp BM$ 并求四棱锥 $M-ABCD$ 的体积；
- (2) 已知点 P 为棱 CM 上靠近点 C 的三等分点，当 $a=3$ 时，求平面 PBD 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值。

20. (12分)

在二十大报告中，体育、健康等关键词被多次提及，促进群众体育和竞技体育全面发展，加快建设体育强国是全面建设社会主义现代化国家的一个重要目标. 某校为丰富学生的课外活动，加强学生体质健康，拟举行羽毛球团体赛，赛制采取3局2胜制，每局都是单打模式，每队有5名队员，比赛中每个队员至多上场一次且是否上场是随机的，每局比赛结果互不影响. 经过小组赛，最终甲、乙两队进入最后的决赛，根据前期比赛的数据统计，甲队种子选手 M 对乙队每名队员的胜率均为 $\frac{3}{4}$ ，甲队其余4名队员对乙队每名队员的胜率均为 $\frac{1}{2}$.

(注：比赛结果没有平局)

- (1) 求甲队最终2:1获胜且种子选手 M 上场的概率；
- (2) 已知甲队2:1获得最终胜利，求种子选手 M 上场的概率.

21. (12分)

已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点， O 为坐标原点， M 为椭圆上任意一点， $|MF|$ 的最大值为 $2 + \sqrt{3}$. 当 $|OM| = |OF|$ 时， $\triangle MOF$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) A, B 为椭圆的左右顶点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ ，当 M 与 A, B 不重合时，射线 MP 交椭圆 C 于点 N ，直线 AM, BN 交于点 T ，求 $\angle ATB$ 的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax}{x+1} - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，证明： $(1-x)e^{4x-\frac{1}{x}} - 4x^2 + x < 0$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

