2022-2023 学年第二学期期末试卷

高二数学参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．

1．C　　2．B　　3．C　　4．C　　5．D　　6．A　　7．B　　8．D

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，不选或有错选的得 0 分．

9．ACD　　10．AC　　11．ABD　　12．BD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13．$\dfrac{9}{5}$　　14．-25　　15．$y=-x$　　16．7π

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）设 A_1：第一次摸到的球是白球，A_2：第一次摸到的球是黑球，

B: 第二次摸到的球是白球，

$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{3}$. ……………………………………………………5 分

（2）X 的可能取值为 2，3，4，

$P(X=2)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{9}$,

$P(X=3)=C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$,

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=\dfrac{20}{27}$, ……………………………………………………8 分

所以数学期望 $E(X)=2\times\dfrac{1}{9}+3\times\dfrac{4}{27}+4\times\dfrac{20}{27}=\dfrac{98}{27}$. ……………………………………………9 分

答：（1）第二次摸到的球是白球的概率为$\dfrac{2}{3}$；（2）试验停止时试验的次数 X 的数学期望为$\dfrac{98}{27}$.

……………………………………………………………………………………………… 10 分

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知得，$b^2+a^2-c^2=ac\cos A+a^2\cos C$，

由余弦定理，得 $b^2+a^2-c^2=2ab\cos C$，

$\therefore ac\cos A+a^2\cos C=2ab\cos C$，　　--**2 分**

$\because a>0$，$\therefore c\cos A+a\cos C=2b\cos C$，

由正弦定理，有 $2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$，　　-- **4 分**

又 $C\in(0，\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$.　　---**5 分**

（2）在三角形 ABC 中，$B=\frac{2\pi}{3}-A$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得：

$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A$ ，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-A)$， --7 分

$\therefore a-b=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A-\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(A-\frac{\pi}{3})$， ----------------------- 10 分

$\because$ 在三角形 ABC 中 $C=\frac{\pi}{3}$，$0<A<\pi$，$0<B=\frac{2\pi}{3}-A<\pi$，

$\therefore 0<A<\frac{2\pi}{3}$，显然 $-\frac{\pi}{3}<A-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$，即 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(A-\frac{\pi}{3})<\frac{\sqrt{3}}{2}$，则有 $-2<\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(A-\frac{\pi}{3})<2$，

所以 $a-b$ 的取值范围是$(-2, 2)$． ---12 分

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $f(x)=2ax-e^x$，得 $f'(x)=2a-e^x$， -- 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在 R 上单调递减； --- 3 分

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2a$，

当 $x\in(-\infty，\ln 2a)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；$x\in(\ln 2a，+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减

---6 分

（2）由（1）知，当 $a>0$ 时，$f_{max}(x)=f(\ln 2a)=2a\ln 2a-2a$， --7 分

要证：当 $a>0$ 时，$f(x)\leqslant 4a^2-4a$，可证：$2a\ln 2a-2a\leqslant 4a^2-4a$，

因为 $a>0$，即证：$\ln 2a\leqslant 2a-1$， ---9 分

设 $g(a)=\ln 2a-2a+1$，$g'(a)=\frac{1}{a}-2$，令 $g'(a)=0$，则 $a=\frac{1}{2}$， -------------------------------------10 分

所以当 $a\in(0，\frac{1}{2})$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增；当 $a\in(\frac{1}{2}，+\infty)$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减，

$g_{max}(a)=g(\frac{1}{2})=0$，所以 $g(a)\leqslant 0$，即 $\ln 2a\leqslant 2a-1$，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)\leqslant 4a^2-4a$． --12 分

20．（本小题满分 12 分）

（1）因为$\{\frac{S_n}{n}\}$是公差为 2 的等差数列，$\frac{S_1}{1}=\frac{a_1}{1}=2$，

所以$\frac{S_n}{n}=2+(n-1)\times 2=2n$，得 $S_n=2n^2$， ---2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-2$；$n=1$ 时，$a_1=2$ 符合，

所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=4n-2$. -- 4 分

（2）由 $b_n-b_{n-1}=2a_n=8n-4\ (n\geqslant 2)$，且 $b_1=3$，

当 $n\geqslant 2$ 时，则有 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=3+12+20+\cdots+(8n-4)$

$$=3+\frac{(8n-4+12)(n-1)}{2}=4n^2-1,$$ -- 7 分

又 $b_1=3$ 也满足 $b_n=4n^2-1$，故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$b_n=4n^2-1$，--8 分

$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$， --10 分

$T_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$. -------------------------------- 12 分

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）过点 A 作 $AE\perp PB$ 于点 E，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，$AE\subset$ 平面 PAB，

所以 $AE\perp$ 平面 PBC，-------------------------------3 分

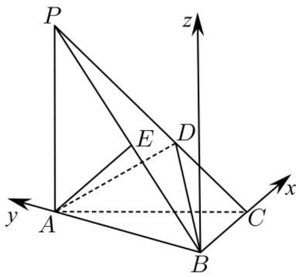
又 $BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $AE\perp BC$，

又 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $PA\perp BC$，-------4 分

又因为 $AE\cap PA=A$，AE，$PA\subset$ 平面 PAB，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB．-------------------------------5 分



（2）假设在线段 PC 上(不含端点)，存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$，

以 B 为原点，分别以 $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BA}$ 为 x 轴，y 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系，则

$A(0，6，0)$，$B(0，0，0)$，$C(3，0，0)$，$P(0，6，6)$，

$\overrightarrow{AC}=(3，-6，0)$，$\overrightarrow{AP}=(0，0，6)$，$\overrightarrow{PC}=(3，-6，-6)$，$\overrightarrow{BA}=(0，6，0)$，

设面 ACD 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(x，y，z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x-6y=0,\\ 6z=0,\end{cases}$ 取 $x=2$，$y=1$，$z=0$，

即 $\overrightarrow{m}=(2，1，0)$，--- 7 分

因为 D 在线段 PC 上（不含端点），所以可设 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PC}=(3\lambda，-6\lambda，-6\lambda)$，$0<\lambda<1$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}=(3\lambda，-6\lambda，6-6\lambda)$，

设面 ABD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(x，y，z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6y=0,\\ 3\lambda x-6\lambda y+(6-6\lambda)z=0\end{cases}$，取 $x=2\lambda-2$，$y=0$，$z=\lambda$，

即 $\overrightarrow{n}=(2\lambda-2，0，\lambda)$， --**9 分**

$\cos<\overrightarrow{m}，\overrightarrow{n}>=\dfrac{2\times(2\lambda-2)+1\times0+0\times\lambda}{\sqrt{5}\times\sqrt{(2\lambda-2)^2+\lambda^2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$，又 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，

所以，存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

此时 D 是 PC 上靠近 C 的三等分点．--**12 分**

22．（本小题满分 12 分）

（1）$A(\sqrt{2}，0)$，$B(0，b)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2}，b)$，$M(\dfrac{\sqrt{2}}{2}，\dfrac{b}{2})$，

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=-1+\dfrac{1}{2}b^2=-\dfrac{1}{2}b^2$，所以 $b^2=1$，

椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． --**4 分**

（2）若 PQ 的斜率不存在，则 $P(\sqrt{2}，1)$，$Q(-\sqrt{2}，1)$ 或 $Q(\sqrt{2}，1)$，$P(-\sqrt{2}，1)$，

此时 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\dfrac{1}{2}$； --**5 分**

若 PQ 的斜率存在时，可设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+y^2=3,\end{cases}$ 联立消去 y 可得，$(k^2+1)x^2+2kmx+m^2-3=0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{2km}{k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{m^2-3}{k^2+1}$，

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=\dfrac{m^2-3k^2}{k^2+1}$， --**8 分**

当直线 PQ 与椭圆相切时，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 联立消去 y 可得，$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

$\triangle=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=0$，化简得 $2k^2+1=m^2$， -------------------------**11 分**

所以 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{m^2-3k^2}{m^2-3}=-\dfrac{1}{2}$． -- **12 分**