哈尔滨师大附中、东北师大附中、辽宁省实验中学
2022年高三第二次联合模拟考试
文科数学试题及答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$M=\{x|\log_2 x<1\}, N=\{x|x^2\le 1\}$，则$M\cup N=$（ C ）

A．$(-\infty,1]$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$[-1,2)$　　D．$(0,1]$

2．复数$z=\dfrac{4-3i}{2-i}$（其中i为虚数单位）的模为（ B ）

A.1　　B．$\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．5

3. 双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为（ B ）

A．$y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　B．$y=\pm\dfrac{3}{4}x$　　C．$y=\pm\dfrac{5}{3}x$　　D．$y=\pm\dfrac{3}{5}x$

4. 命题“$\forall x\ge 2$，$x^2-4x+4\ge 0$”的否定是（ D ）

A．$\forall x\ge 2$，$x^2-4x+4<0$　　B．$\exists x<2$，$x^2-4x+4<0$

C．$\forall x<2$，$x^2-4x+4<0$　　D．$\exists x\ge 2$，$x^2-4x+4<0$

5.为研究变量x、y的相关关系，收集得到下面五个样本点(x,y)：

x	9	9.5	10	10.5	11
y	11	10	8	6	5

若由最小二乘法求得y关于x的回归直线方程为$\hat{y}=-3.2x+\hat{a}$，则据此计算残差为0的样本点是（ B ）

A．(9,11)　　B．(10,8)　　C．(10.5,6)　　D．(11,5)

6．将函数$y=\sin(4x+\dfrac{\pi}{6})$图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍，再向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位，所得图象对应的函数（ A ）

A．在区间$(0,\dfrac{\pi}{3})$上单调递增　　B．在区间$(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{12})$上单调递减

C．图象关于点$(\dfrac{\pi}{3},0)$对称　　D．图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{12}$对称

7．下列说法错误的是（ C ）

A.由函数$y=x+x^{-1}$的性质猜想函数$y=x-x^{-1}$的性质是类比推理

B.由$\ln 1\le 0, \ln 2<1, \ln 3<2\cdots$猜想$\ln n\le n-1(n\in N^*)$是归纳推理

C.由锐角x满足$\sin x<x$及$0<\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{2}$，推出$\sin\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{12}$是合情推理

D. “因为$\cos(-x)=\cos x$恒成立，所以函数$y=\cos x$是偶函数”是省略大前提的三段论推理

8．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$a=4$，$\sin A=2\sin C$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则$\triangle ABC$的面积$S=$（ D ）

A．$\sqrt{15}$　　B．$2\sqrt{15}$　　C．1　　D．$\frac{3\sqrt{15}}{4}$

9. 已知圆锥的顶点为点S，高是底面半径的$\sqrt{2}$倍，点A,B是底面圆周上的两点，当ΔSAB是等边三角形时面积为$3\sqrt{3}$，则圆锥的侧面积为（ D ）

A. $\sqrt{3}\pi$　　B. $2\sqrt{3}\pi$　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. $4\sqrt{3}\pi$

10．定义域为R的奇函数$f(x)$满足$f(x)=f(-x+2)$，则$f(2022)=$（ A ）

A．0　　B．-1　　C．1　　D. 不确定

11．椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为点$F$，过原点$O$的直线与椭圆交于$P,Q$两点，若$\angle PFQ=120^\circ$，$|OF|=\sqrt{3},|OP|=\sqrt{7}$，则椭圆$C$的离心率为（ B ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

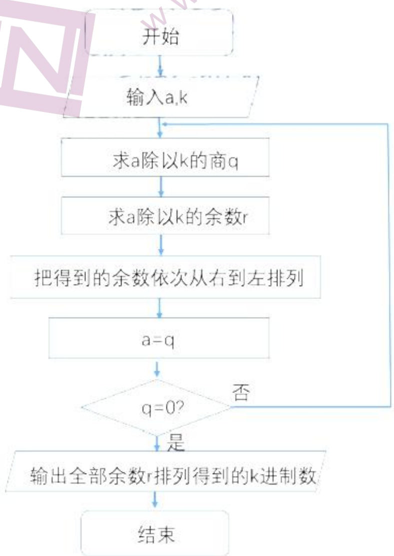
12．已知实数a,b,c满足$a<2$，$a\ln a-2\ln 2=a-2$，$b<\sqrt{2}$，$b\ln b-\sqrt{2}\ln\sqrt{2}=b-\sqrt{2}$，$c>\frac{1}{2}$，$c\ln c-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=c-\frac{1}{2}$，则（ D ）

A．$c<b<a$　　B．$b<c<a$　　C．$a<c<b$　　D．$a<b<c$

二、填空题:本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.盒子中装有编号为0,1,2,3,4的五个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是___$\frac{9}{10}$___.

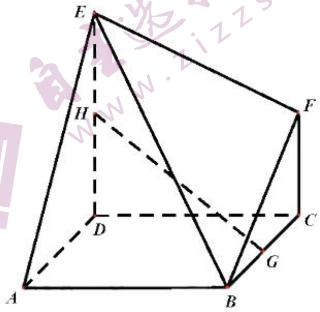
14.在爱尔兰小说《格列佛游记》里，有格列佛在小人国一顿吃了1728份小人饭的叙述，作者为什么要使用这么复杂的数字呢？许多研究者认为，之所以选用这个数字，跟英国人计数经常使用的十二进制有关系.中国文化中，十二进制也有着广泛应用，如12地支，12个时辰，12生肖….十二进制通常使用数字0~9以及字母A,B表示，其中A即数字10，B即数字11.对于下面的程序框图，若输入$a=1728$，$k=12$，则输出的结果为__1000__.



此题答$1000_{(12)}$也可以给分.

15. 在正六边形 $ABCDEF$ 中，点 G 为线段 DF 上的动点（包含端点），若 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CB}+\mu\overrightarrow{CD}(\lambda,\mu\in R)$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是__ $[1,4]$ ___.

16. 如图，多面体 $ABCDEF$ 中，面 $ABCD$ 为正方形，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF//DE$，且 $AB=DE=2,CF=1$, G 为棱 BC 的中点，H 为棱 DE 上的动点，有下列结论：①当 H 为棱 DE 的中点时，$GH//$ 平面 ABE；②存在点 H，使得 $GH\perp AC$；③三棱锥 $B-GHF$ 的体积为定值；④三棱锥 $A-BCF$ 的外接球表面积为 9π. 其中正确的结论序号为 ①③④ .（填写所有正确结论的序号）



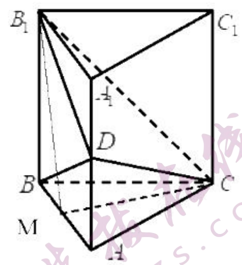
三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BA=BB_1=2$, 点 D 是棱 AA_1 的中点.

（1）求证: $BD\perp B_1C$；

（2）求点 B 到平面 DCB_1 的距离.



（1）证明：

设 AB 的中点为 M，连接 B_1M,CM

$\because$ 正方形 ABB_1A_1 中，$B_1B=BA$，$BM=AD$, $\therefore\triangle B_1BM\cong\triangle BAD$, $\therefore BD\perp B_1M$，

$\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$CM\subset$ 平面 ABC $\therefore AA_1\perp CM$，

又 $AC=BC$, M 为 AB 中点, $\therefore CM\perp AB$，

$\because AB\cap AA_1=A$，$\therefore CM\perp$ 平面 ABB_1A_1，　　-----------------3 分

$\because BD\subset$ 平面 ABB_1A_1 $\therefore BD\perp CM$，

$\because B_1M\cap CM=M, B_1M\subset$ 平面 B_1CM, $CM\subset$ 平面 B_1CM，$\therefore BD\perp$ 平面 B_1CM

$\because B_1C\subset$ 平面 B_1CM，$\therefore BD\perp B_1C$　　-----------------6 分

（2）设点 B 到平面 DCB_1 的距离为 h，

$\because V_{B-DCB_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta DCB_1}\cdot h=V_{C-BDB_1}$，　　-----------------7 分

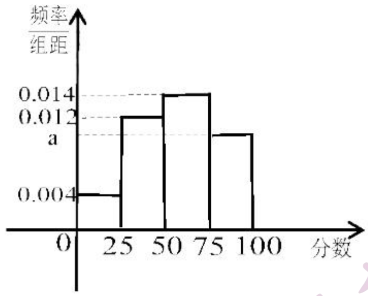
$\because B_1D=DC=\sqrt{5}, B_1C=2\sqrt{2}$　$\therefore S_{\Delta DCB_1}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$　　-----------------8 分

由（1）$CM\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CM=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$ 为 $C-BDB_1$ 的高

又 $S_{\Delta BDB_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$, $\therefore V_{C-BDB_1}=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　-----------------10 分

$\therefore\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore h=\sqrt{2}$，故点 B 到平面 DCB_1 的距离为 $\sqrt{2}$.　-----------------12 分

18.（本小题满分 12 分）五常市是黑龙江省典型农业大县（市）、国家重要的商品粮食基地，全国粮食生产十大先进县之一，也是全国水稻五强县之一，被誉为张广才岭下的“水稻王国”．五常大米受产区独特的地理、气候等因素影响，干物质积累多，直链淀粉含量适中，支链淀粉含量较高。由于水稻成熟期产区昼夜温差大，大米中可速溶的双链糖积累较多，对人体健康非常有益．五常大米根据颗粒、质地、色泽、香味等评分指标打分，得分在区间 $[0,25],(25,50],(50,75],(75,100]$ 内分别评定为四级大米、三级大米、二级大米、一级大米．某经销商从五常市农民手中收购一批大米，共 400 袋（每袋 25kg），并随机抽取 20 袋分别进行检测评级，得分数据的频率分布直方图如图所示．



（1）求 a 的值，并用样本估计，该经销商采购的这批大米中，一级大米和二级大米的总量能否达到采购总量一半以上；

（2）该经销商计划在下面两个方案中选择一个作为销售方案：

方案 1：将采购的 400 袋大米按每袋 300 元不分等级直接售出；

方案 2：将采购的 400 袋大米逐袋检测分级，并将每袋大米重新包装成 5 包（每包 5kg），检测分级所需费用和人工费共 8000 元，各等级大米每包的售价和包装材料成本如下表所示：

大米等级	四级	三级	二级	一级
售价（元/包）	55	68	85	98
包装材料成本（元/包）	2	2	4	5

该经销商采用哪种销售方案所得利润更大？通过计算说明理由．

解：（1）$\because (0.004+0.012+0.014+a)\times 25=1$ $\therefore a=0.010$ ----------------2 分

$\because (0.014+0.010)\times 25=0.6>0.5$

$\therefore$估计经销商采购的这批大米中，一级大米和二级大米的总量能够达到采购总量的一半以上. ----------------4 分

（2）若经销商采用方案 1，则收入为 $400\times 300=120000$ 元. ----------------5 分

若经销商采用方案 2

400 袋大米中四级大米约 $400\times 0.004\times 25=40$ 袋，$40\times 5=200$ 包

三级大米约 $400\times 0.012\times 25=120$ 袋，$120\times 5=600$ 包

二级大米约 $400\times 0.014\times 25=140$ 袋，$140\times 5=700$ 包

一级大米约 $400\times 0.010\times 25=100$ 袋，$100\times 5=500$ 包----------------7 分

400 袋大米共卖 $200\times 55+600\times 68+700\times 85+500\times 98=160300$ 元

400 袋大米的包装袋成本为 $200\times 2+600\times 2+700\times 4+500\times 5=6900$ 元

$\therefore$收入为 $160300-6900-8000=145400$ 元 ----------------10 分

$\because 145400>120000$，且 400 袋大米成本相同，

$\therefore$该经销商采用方案 2 所得利润更大. ----------------12 分

19.（本小题满分 12 分）已知等差数列$\{a_n\}$公差不为零，$a_1+a_2+a_3=a_5$，$a_2a_3=a_8$，数列$\{b_n\}$各项均为正数，$b_1=1$，$b_n^2-3b_{n+1}^2=2b_nb_{n+1}$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若$\dfrac{\lambda}{b_{n+1}}+6\geqslant a_n$恒成立，求实数$\lambda$的最小值.

解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由条件，$\begin{cases}3a_1-3d=a_1+4d,\\(a_1+d)(a_1+2d)=a_1+7d,\end{cases}$ ------------------1 分

解得$\begin{cases}a_1=0\\d=0\end{cases}$，或$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，$\because d\neq0$，$\therefore\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$ ------------------ 3 分

$\because 3b_{n+1}^2+2b_nb_{n+1}-b_n^2=0$，$\therefore(b_{n+1}+b_n)(3b_{n+1}-b_n)=0$，$\because b_n>0$，$\therefore b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

又$b_1=1\neq0,\therefore b_n\neq0,$，$\therefore\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore\{b_n\}$是以 1 为首项，$\dfrac{1}{3}$为公比的等比数列.

$\therefore b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ------------------ 6 分

（2）$\because b_n=(\dfrac{1}{3})^{n-1},a_n=2n-1,\therefore\dfrac{\lambda}{b_{n+1}}+6\geq a_n$，即$\dfrac{\lambda}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}+6\geq2n-1$，即$\lambda\geq\dfrac{2n-7}{3^n}$恒成立

------------------ 7 分

设$c_n=\dfrac{2n-7}{3^n}$，则$c_{n+1}-c_n=\dfrac{2n-5}{3^{n+1}}-\dfrac{2n-7}{3^n}=\dfrac{-4(n-4)}{3^{n+1}}$， ------------------ 9 分

即$n=1,2,3$时$c_{n+1}>c_n$；$n=4$时$c_{n+1}=c_n$；$n\geq5,n\in N^*$时$c_{n+1}<c_n$，

$\therefore n=4$或5时，$c_n=\dfrac{1}{81}$为$\{c_n\}$的最大项， ------------------ 11 分

$\therefore\lambda\geq\dfrac{1}{81}$，故实数$\lambda$的最小值为$\dfrac{1}{81}$. ------------------ 12 分

20.（本小题满分 12 分）设函数 $f(x)=(x+a)\ln x-\frac{a}{2}(x+1)$.

（1）若 $a=2$，过点 $A(-2,-8)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求切点的坐标；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，求整数 a 的最大值.

解：（1）$a=2$时，$f(x)=(x+2)\ln x-(x+1), f'(x)=\ln x+\frac{2}{x}(x>0)$，————————1 分

设切点为 $P(x_0,y_0)$，则点 P 处切线方程为：$y-(x_0+2)\ln x_0+(x_0+1)=(\ln x_0+\frac{2}{x_0})(x-x_0)$，

将 $A(-2,-8)$ 代入得：$-8-(x_0+2)\ln x_0+(x_0+1)=(\ln x_0+\frac{2}{x_0})(-2-x_0)$，

即 $x_0-7=\frac{-4}{x_0}-2$，解得 $x_0=1$,或$x_0=4$， ---------------------------3 分

$x_0=1$时，$y_0=f(x_0)=-2$; $x_0=4$时，$y_0=f(x_0)=12\ln 2-5$，

$\therefore$ 所求切点坐标为 $(1,-2)$ 和 $(4,12\ln 2-5)$. ---------------------------4 分

（2）$f(x)=(x+a)\ln x-\frac{a}{2}(x+1)$. 记 $g(x)=f'(x)=1+\ln x+\frac{a}{x}-\frac{a}{2}(x>0)$

$\because (2,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增，$\therefore x>2$时，$g(x)=\ln x+\frac{a}{x}+1-\frac{a}{2}\ge 0$恒成立， -----------------5 分

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$

① $2-a\ge 0$,即$a\le 2$时，

$x>2$时，$x-a>0, x^2>0, \therefore g'(x)>0, \therefore g(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x)>g(2)=\ln 2+\frac{a}{2}+1-\frac{a}{2}=\ln 2+1>0$,

故 $a\in Z, a\le 2$时满足条件. ---------------------------7 分

② $2-a<0$,即$a>2$时，

$(2,a)$上$x-a<0, x^2>0, g'(x)<0, g(x)$单调递减; $(a,+\infty)$上$x-a>0, x^2>0, g'(x)>0, g(x)$单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(a)=\ln a+2-\frac{a}{2}$, ---------------------------9 分

记$h(a)=\ln a+2-\frac{a}{2}$, $(2,+\infty)$上$h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}<0$, $h(a)$单调递减，

$\because h(8)=\ln 8-2>\ln e^2-2=0, h(9)=\frac{1}{2}(4\ln 3-5)=\frac{1}{2}(\ln 81-\ln e^5)<\frac{1}{2}(\ln 81-\ln(\frac{5}{2})^5)<0$

$a\in Z, 3\le a\le 8$时满足条件. ---------------------------11 分

由①②知，满足条件的整数 a 的最大值为 8. ---------------------------12 分

21.（本小题满分 12 分）已知点 F 为抛物线 $E: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点，点 $P(-3,2)$, $|PF| = 2\sqrt{5}$, 若过点 P 作直线与抛物线 E 顺次交于 A、B 两点，过点 A 作斜率为 1 的直线与抛物线的另一个交点为 C.

（1）求抛物线 E 的标准方程；

（2）求证：直线 BC 过定点.

解：（1）焦点 $F(\frac{p}{2},0)$, $|FP| = \sqrt{(-3-\frac{p}{2})^2+4} = 2\sqrt{5}$ $\because p>0$ $\therefore p=2$

抛物线 E 的标准方程为 $y^2 = 4x$ ----------------2 分

（2）显然，直线 AB 斜率存在，设 AB 的方程为 $y-2=k(x+3)$

由 $\begin{cases} y-2=k(x+3) \\ y^2=4x \end{cases}$ 得，$ky^2-4y+8+12k=0$, $k\neq 0$, $\Delta = 16(-3k^2-2k+1)>0$,

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$, $y_1y_2=\frac{8}{k}+12$，$\therefore y_1y_2-12=2(y_1+y_2)$ ---------①

直线 AC 的方程为 $y-y_1=x-\frac{y_1^2}{4}$，

由 $\begin{cases} y-y_1=x-\frac{y_1^2}{4} \\ y^2=4x \end{cases}$ 得，$y^2-4y+4y_1-y_1^2=0$，$\Delta=16-4(4y_1-y_1^2)>0$，

设 $C(x_3,y_3)$ 则 $y_1+y_3=4$ ---------②

由①②得 $(4-y_3)y_2-12=2(4-y_3+y_2)$, $\therefore 2(y_2+y_3)=y_2y_3+20$ ---------③

----------------4 分

（i）若直线 BC 没有斜率，则 $y_2+y_3=0$, 又 $2(y_2+y_3)=y_2y_3+20$，$\therefore y_3^2=20$, $\therefore x_3=\frac{y_3^2}{4}=5$,

$\therefore BC$ 的方程为 $x=5$. ----------------5 分

（ii）若直线 BC 有斜率，为 $\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{4}{y_2+y_3}$，

直线 BC 的方程为 $y-y_2=\frac{4}{y_2+y_3}(x-\frac{y_2^2}{4})$，即 $4x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$，

将③代入得 $4x-(y_2+y_3)y+2(y_2+y_3)-20=0$，$\therefore (y_2+y_3)(2-y)+4(x-5)=0$，

故直线 BC 有斜率时过点 $(5,2)$.

由（i）（ii）知，直线 BC 过点 $(5,2)$. ----------------8 分

(3) $S_1=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times8\times|y_1-y_2|=4|y_1-y_2|$

$S_2=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|y_2-y_3|=\frac{1}{2}\times8\times|y_2-y_3|=4|y_2-y_3|=4|y_1+y_2-4|$ -----------------9 分

由（2）得 $y_1+y_2=\frac{4}{k}, y_1y_2=\frac{8}{k}+12$，$|y_1-y_2|=\sqrt{\frac{16}{k^2}-\frac{32}{k}-48}=\frac{4\sqrt{-3k^2-2k+1}}{|k|}$

$k\neq0$，$\Delta=16(-3k^2-2k+1)>0, \therefore -1<k<\frac{1}{3}$，且$k\neq0$，

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|y_1-y_2|}{|y_1+y_2-4|}=\frac{4\sqrt{-3k^2-2k+1}}{|k|\cdot\left|\frac{4}{k}-4\right|}=\frac{\sqrt{-3k^2-2k+1}}{|k-1|}$ -----------------10 分

设 $k-1=u$，$t=\frac{1}{u}$，

$\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{\frac{-(u+2)(3u+2)}{u^2}}=\sqrt{-\frac{3u^2+8u+4}{u^2}}=\sqrt{-4t^2-8t-3}=\sqrt{-4(t+1)^2+1}$

$\because -1<k<\frac{1}{3}$，且$k\neq0, \therefore t\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,-\frac{1}{2})$ $\therefore \sqrt{-4(t+1)^2+1}\in(0,1)$，

故 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围是$(0,1)$. -----------------12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分，作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑.

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系中以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，点 A,B 的极坐标为 $A(2,\frac{5\pi}{4}), B(2,\frac{\pi}{4})$，圆 C_1 以 AB 为直径，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=6$.

（1）求圆 C_1 及直线 l 的直角坐标方程；

（2）圆 C_1 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x, \\ y'=\frac{\sqrt{6}}{2}y \end{cases}$ 得到曲线 C_2，设点 P 为曲线 C_2 上的任意一点，求点 P 到 l 距离的取值范围.

解 (1) $\because$ 极点O为AB的中点，$OA=OB=2, \therefore C_1$的极坐标方程为$\rho=2$，

由$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，得C_1的直角坐标方程为$x^2+y^2=4$， -----------------3 分

由$\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=6$，得$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-6\sqrt{2}=0$，

$\because \rho\cos\theta=x, \rho\sin\theta=y, \therefore l$的直角坐标方程为$x-y-6\sqrt{2}=0$. -----------------5 分

(2) 由 $\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x, \\ y'=\dfrac{\sqrt{6}}{2}y \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\sqrt{2}x' \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{6}}y' \end{cases}$，代入 $x^2+y^2=4$，得 $2x'^2+\dfrac{4}{6}y'^2=4$

所以 C_2 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$，$C_2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{6}\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)，------------7 分

设 $P(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{6}\sin\theta)$ 为 C_2 上任意一点，点 P 到 l 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{\left|\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta-6\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|2\sqrt{2}\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})-6\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=6-2\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})$

所以 当 $\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=-1$时，$d_{\max}=8$，当 $\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$时，$d_{\min}=4$

所以 P 到 l 的距离的取值范围是 $[4,8]$ ------------------10 分

23. [选修 4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|2x-1|-|2x+1|$ 的值域为 $M=[a,b]$.

（1）若 $x\in M, y\in M$，求证：$x^2y^2+16\ge 4x^2+4y^2$；

（2）若 $|y+az|<2, |by+z|<1$，求证：$|z|<1$.

解：（1）$f(x)=\begin{cases} 2, x<-\dfrac{1}{2}, \\ -4x, -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}, \\ -2, x>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$

$f(x)$在$[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$上单调递减，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$ ------------------------2 分

方法二：$\because \left||2x-1|-|2x+1|\right|\le|(2x-1)-(2x+1)|=2$

，当且仅当 $(2x-1)(2x+1)\ge 0$，即 $x\le-\dfrac{1}{2}$ 或 $x\ge\dfrac{1}{2}$ 等号取到

$\therefore -2\le|2x-1|-|2x+1|\le 2$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$

原不等式 $\Leftrightarrow x^2y^2-4x^2-4y^2+16\ge 0 \Leftrightarrow x^2(y^2-4)+4(4-y^2)\ge 0 \Leftrightarrow (4-y^2)(4-x^2)\ge 0$

$\because -2\le x\le 2, -2\le y\le 2, \therefore (4-y^2)(4-x^2)\ge 0$成立，

$\therefore x^2y^2+16\ge 4x^2+4y^2$成立. ------------------------5 分

（2）由（1）得 $a=-2,b=2$，$\therefore |y-2z|<2,|2y+z|<1$

$\therefore |5z|=|(2y+z)-2(y-2z)|\le|2y+z|+2|y-2z|<1+2\times2=5$，

$\therefore |z|<1$. ------------------------10 分