2020年东北三省四市教研联合体高考模拟试卷

数　学(理科)

第Ⅰ卷(选择题共60分)

考生须知:

1. 本试卷分试题卷和答题卡,满分150分,考试时间120分钟。
2. 答题前,在答题卡指定位置上填写学校、班级、姓名和准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卡上,写在试卷上无效。
4. 考试结束,只需上交答题卡。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,集合 $A=\{2,3,5,7\}$,$B=\{1,2,4,6\}$,则 $A\cap(\complement_U B)$(　　)

A. $\{2,5,7\}$　　B. $\{3,5,7\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\{5,7\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{2i}{i-1}$,则 z 的虚部为(　　)

A. -1　　B. $-i$　　C. 1　　D. i

3. 2019年某校迎国庆70周年歌咏比赛中,甲乙两个合唱队每场比赛得分的茎叶图如右图所示(以十位数字为茎,个位数字为叶).若甲队得分的中位数是86,乙队得分的平均数是88,则 $x+y=$(　　)

甲		乙
8 8	7	8
8 2 x	8	2 y 9
7 6	9	1 3 7

A. 170　　B. 10　　C. 172　　D. 12

4. $(1+2x)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为(　　)

A. 5　　B. 10　　C. 20　　D. 30

5.《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土,这是我国现存最早的有系统的数学典籍.其中记载有求"囷盖"的术:"置如其周,令相承也.又以高乘之,三十六成一".该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h,计算其体积 $V\approx\dfrac{1}{36}L^2h$ 的近似公式.它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率近似取为3.那么近似公式 $V\approx\dfrac{3}{112}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的圆周率近似取为(　　)

A. $\dfrac{22}{7}$　　B. $\dfrac{157}{50}$　　C. $\dfrac{28}{9}$　　D. $\dfrac{337}{115}$

6. 已知公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n,$a_1=2$,且 a_1,a_3,a_9 成等比数列,则 $S_8=$(　　)

A. 56　　B. 72　　C. 88　　D. 40

7. 下列说法正确的是(　　)

A. 命题"$\exists x_0\leqslant 0,2^{x_0}\leqslant \sin x_0$"的否定形式是"$\forall x>0,2^x>\sin x$"

B. 若平面 α,β,γ,满足 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$ 则 $\alpha/\!/\beta$

C. 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$,若 $P(0<\xi<1)=0.4$,则 $P(\xi>0)=0.8$

D. 设 x 是实数,"$x<0$"是"$\dfrac{1}{x}<1$"的充分不必要条件

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点与圆 $M:(x-2)^2+y^2=5$ 的圆心重合，且圆 M 被双曲线的一条渐近线截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则双曲线的离心率为(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

9. 已知 $A(x_A,y_A)$ 是圆心为坐标原点 O，半径为 1 的圆上的任意一点，将射线 OA 绕点 O 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 到 OB 交圆于点 $B(x_B,y_B)$，则 $2y_A+y_B$ 的最大值为(　　)

A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

10. 从集合 $\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$ 中随机选取一个数记为 m，从集合 $\{-2,-1,2,3,4\}$ 中随机选取一个数记为 n，则在方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示双曲线的条件下，方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线的概率为(　　)

A. $\frac{9}{17}$　　B. $\frac{8}{17}$　　C. $\frac{17}{35}$　　D. $\frac{9}{35}$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x+1}+2, x\leqslant 0,\\ |\log_2 x|, x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2af(x)+3a=0$ 有六个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $(3,\frac{16}{5})$　　B. $(3,\frac{16}{5}]$　　C. $(3,4)$　　D. $(3,4]$

12. 已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$，且当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=-x^2+2x$. 设 $f(x)$ 在 $[2n-2,2n)$ 上的最大值为 $a_n(n\in N^*)$，且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n. 若对于任意正整数 n 不等式 $k(S_n+1)\geqslant 2n-9$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为(　　)

A. $[0,+\infty)$　　B. $[\frac{1}{32},+\infty)$　　C. $[\frac{3}{64},+\infty)$　　D. $[\frac{7}{64},+\infty)$

第Ⅱ卷(非选择题共 90 分)

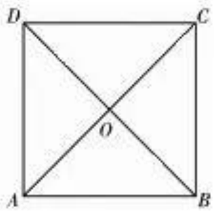
本卷包括必考题和选考题两部分，第 13～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22～23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分.

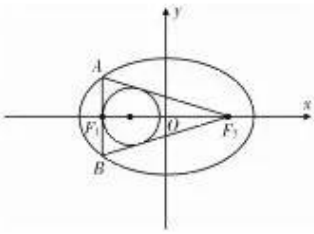
13. 若曲线 $f(x)=ae^x-\ln x$（其中常数 $a\neq 0$）在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 1，则 $a=$________.

14. 若函数 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图像. 则 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$ 上的最小值为________.

15. 如图所示，在边长为 4 的正方形纸片 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于 O. 剪去 $\triangle AOB$，将剩余部分沿 OC、OD 折叠，使 OA、OB 重合，则以 $A(B)$、C、D、O 为顶点的四面体的外接球的体积为________.



16. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，如图 AB 是过 F_1 且垂直于长轴的弦，则 $\triangle ABF_2$ 的内切圆方程是________.



三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22～23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 边上一点，$\angle BAM=45°$，$\cos\angle AMC=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅰ）求 $\sin B$；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$，$AC=4$，求 MC.

18.（本小题满分 12 分）

某大型单位举行了一次全体员工都参加的考试，从中随机抽取了 20 人的分数. 以下茎叶图记录了他们的考试分数（以十位数字为茎，个位数字为叶）：

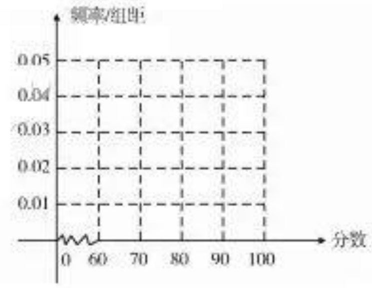
	分数
6	7 5
7	8 6 3 3 3 1
8	9 8 8 7 7 6 3 3
9	8 6 6 5

若分数不低于 95 分，则称该员工的成绩为“优秀”.

（Ⅰ）从这 20 人中任取 3 人，求恰有 1 人成绩“优秀”的概率；

（Ⅱ）根据这 20 人的分数补全下方的频率分布表和频率分布直方图，并根据频率分布直方图解决下面的问题.

组别	分组	频数	频率	$\frac{频率}{组距}$
1	[60，70)			
2	[70，80)			
3	[80，90)			
4	[90，100)			



（ⅰ）估计所有员工的平均分数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（ⅱ）若从所有员工中任选 3 人，记 X 表示抽到的员工成绩为“优秀”的人数，求 X 的分布列和数学期望.

19. **(本小题满分 12 分)**

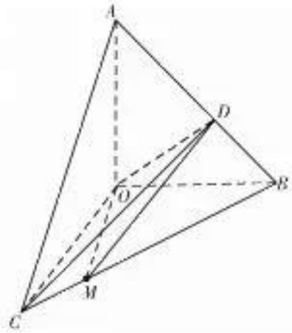
已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，过 C 上一点 $P(1,t)(t>0)$ 作两条倾斜角互补的直线分别与 C 交于 M,N 两点.

(Ⅰ)证明：直线 MN 的斜率是 -1；

(Ⅱ)若 $8|MF|,|MN|,|NF|$ 成等比数列，求直线 MN 的方程.

20. **(本小题满分 12 分)**

如图，在直角 $\triangle AOB$ 中，$OA=OB=2$，$\triangle AOC$ 通过 $\triangle AOB$ 以直线 OA 为轴顺时针旋转 120° 得到($\angle BOC=120^\circ$). 点 D 为斜边 AB 上一点. 点 M 为线段 BC 上一点，且 $MB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



(Ⅰ)证明：$OM\perp$ 平面 AOB；

(Ⅱ)当直线 MD 与平面 AOB 所成的角取最大值时，求二面角 $B-CD-O$ 的正弦值.

21. **(本小题满分 12 分)**

已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+\cos x(a\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(Ⅰ)当 $a=1$ 时，令 $h(x)=f'(x)-x+\ln x$，$h'(x)$ 为 $h(x)$ 的导数. 证明：$h'(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一的极小值点；

(Ⅱ)已知函数 $y=f(2x)-\frac{2}{3}x^4$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分，请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做则按所做的第一题计分.

22. **(本小题满分 10 分)[选修 4—4 坐标系与参数方程]**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=\frac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ (t 为参数). 点 $p(x_0,y_0)$ 在曲线 C 上，点 $Q(m,n)$ 满足 $\begin{cases}m=2x_0\\ n=\sqrt{3}y_0\end{cases}$.

(Ⅰ)以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，求动点 Q 的轨迹 C_1 的极坐标方程；

(Ⅱ)点 A,B 分别是曲线 C_1 上第一象限，第二象限上两点，且满足 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

23. **(本小题满分 10 分)[选修 4—5 不等式选讲]**

已知关于 x 的不等式 $|x+1|-|x-3|\geqslant|m-2|+m$ 有解.

(Ⅰ)求实数 m 的最大值 t；

(Ⅱ)若 a,b,c 均为正实数，且满足 $a+b+c=t$. 证明：$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant 3abc$.