深圳北理莫斯科大学
2019. 试题及解答.

【试题】

1. 求解方程

$$\left|x^2+2x-6\right|-x=3.$$

2. 解不等式

$$2^{8-x}-9^{\frac{x-1}{2}} \geqslant 3^x-8^{\frac{5-x}{3}}.$$

3. 求解方程

$$\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x-2\cos x}=\frac{\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}.$$

4. 解不等式

$$\log_7 x\log_3 x-\log_2 x+\log_7 3>\frac{\log_7 2}{\log_x 7}.$$

5. 求出 xy 平面上由如下不等式所确定的区域的面积

$$\sqrt{2x|y+1|} \geqslant x+|y+1|-4.$$

6. 记 $[x]$ 为小于等于 x 的最大整数, 求解方程:

$$\left[x^2\right]-10x+21=0.$$

7. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, 已知 $AE \parallel BC$, $AC \parallel ED$, 三角形 ABC 与 CDE 的面积比值为 7, 四边形 $ABCD$ 与 $ACDE$ 的面积比值为 3.

   I) 求 $BC : AE$.

   II) 令 O 为线段 AC 与 BE 的交点. 设三角形 AOE 的面积为 4, 求四边形 $ABCE$ 的面积.

8. 求使得如下方程组仅有唯一解的参数 a 的所有可能取值:

$$\begin{cases} 2x^4-x^3y+4x^2y^2-xy^3+2y^4+xy=2, \\ (6a+6)(x-2)+a^2(y-1)=0. \end{cases}$$

【答案】

1. $x_1 = \dfrac{\sqrt{37}-1}{2}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$.

2. $(-\infty, 3]$.

3. $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $\operatorname{arctg} \dfrac{3}{4} + \pi n$, $\quad n \in \mathbb{Z}$.

4. $(0,1) \cup \left(1, 3^{\log_7 2}\right) \cup \left(3^{\log_2 7}, +\infty\right)$.

5. $24\pi + 32$.

6. $\dfrac{14}{5}$; $\dfrac{29}{10}$; 3; 7; $\dfrac{71}{10}$; $\dfrac{36}{5}$.

7. I) 7 : 2, II) 81.

8. -1; -3; $-\dfrac{3}{2}$.

【解析】

1. 分类讨论并求解如下

$$\left|x^2+2x-6\right| = x+3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+2x-6 = x+3 \\ x^2+2x-6 = -x-3 \end{array}\right. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \geqslant -3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

2. 将不等式中各项写成底为 2 或 3 的指数形式,

$$256 \cdot 2^{-x} - \frac{1}{3} \cdot 3^x \geqslant 3^x - 32 \cdot 2^{-x} \;\Leftrightarrow\; 288 \cdot 2^{-x} \geqslant \frac{4}{3} \cdot 3^x \;\Leftrightarrow\; 216 \geqslant 6^x,$$

从而, $x \leqslant 3$.

3. 显然 $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, 等式可化简为

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 2\cos x} = \sin^2 x - 4\cos^2 x \;\Leftrightarrow\; (\sin x + 2\cos x)\left(\frac{1}{\sin x - 2\cos x} - (\sin x - 2\cos x)\right) = 0,$$

从而 $\sin x + 2\cos x = 0$, 或 $\sin x - 2\cos x = 1$, 或 $\sin x - 2\cos x = -1$. 第一个等式的解为 $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 后两个等式并在一起等价于方程 $(\sin x - 2\cos x)^2 = 1$, 其可转化为 $\cos x(3\cos x - 4\sin x) = 0$. 由于 $\cos x \neq 0$, 可得 $4\sin x = 3\cos x$, 进而解得 $x = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. 首先注意到 $x \neq 1$. 将不等式各项化为以 7 为底的对数, 得

$$\frac{\log_7^2 x}{\log_7 3} - \left(\frac{1}{\log_7 2} + \log_7 2\right)\log_7 x + \log_7 3 > 0.$$

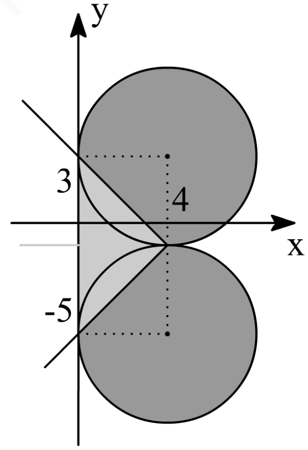
记 $y = \log_7 x$ 看成一个整体, 上式为关于 y 的一个二次方程, 其判别式为 $D = \left(\frac{1}{\log_7 2} - \log_7 2\right)^2$, 解得

$$\log_7 x \in (-\infty, \log_7 2 \cdot \log_7 3) \cup \left(\frac{\log_7 3}{\log_7 2}, +\infty\right)$$

由上式可求出 x 的取值范围 (注意 $x \neq 1$).

5. 题中不等式可转化为

$$
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x+|y+1|-4 \leqslant 0, \\ 2x|y+1| \geqslant 0, \end{cases} \\
\begin{cases} x+|y+1|-4>0, \\ 2x|y+1| \geqslant x^2+2x|y+1|+|y+1|^2-8x-8|y+1|+16, \end{cases}
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x \leqslant 4-|y+1|, \\ 2x|y+1| \geqslant 0, \end{cases} \\
\begin{cases} x>4-|y+1|, \\ (x-4)^2+(|y+1|-4)^2 \leqslant 16. \end{cases}
\end{array}\right.
$$



最终所得第一个不等式组确定的区域为以点 $(4,-1)$, $(0,-5)$ 及 $(0,3)$ 为顶点的三角形, 并上射线 $\{(x,-1):\ x \leq 4\}$, 即图中浅灰色区域; 第二个不等式组确定的区域为圆 $(x-4)^2+(y-3)^2 \leqslant 16$ 及 $(x-4)^2+(y+5)^2 \leqslant 16$, 位于图像 $x=4-|y+1|$ 右侧的部分, 即图中深灰色区域. 为求总区域的面积, 注意到其可看成一个长 8 宽 4 的矩形, 与两个半径为 4, 中心角为 $3\pi/2$ 的扇形区域的并.

因此 $S=4\cdot 8+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot 4^2=24\pi+32$.

6. 由定义, $x^2-1<\left[x^2\right] \leqslant x^2$, 因此

$$
\begin{cases} x^2-1-10x+21<0 \\ x^2-10x+21 \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow x \in (5-\sqrt{5},3] \cup [7,5+\sqrt{5}),
$$

接下来只需进行逐段搜索:

$$x \in (5-\sqrt{5},\sqrt{8}) \Rightarrow \left[x^2\right]=7 \Rightarrow 28-10x=0 \Rightarrow x=\frac{14}{5};\quad \frac{14}{5} \in (5-\sqrt{5},\sqrt{8}) \Rightarrow x=\frac{14}{5} \text{ 是一个解;}$$

$$x \in [\sqrt{8},3) \Rightarrow \left[x^2\right]=8 \Rightarrow 29-10x=0 \Rightarrow x=\frac{29}{10};\quad \frac{29}{10} \in [\sqrt{8},3) \Rightarrow x=\frac{29}{10} \text{ 是一个解;}$$

$$x=3 \text{ 显然是一个解;}$$

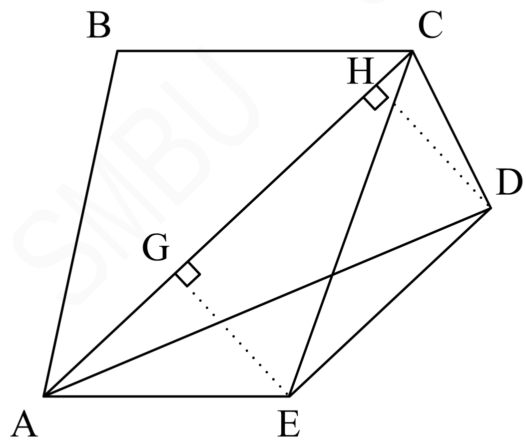
$$x \in [7,\sqrt{50}) \Rightarrow \left[x^2\right]=49 \Rightarrow 70-10x=0 \Rightarrow x=7;\quad 7 \in [7,\sqrt{50}) \Rightarrow x=7 \text{ 是一个解;}$$

$$x \in [\sqrt{50},\sqrt{51}) \Rightarrow \left[x^2\right]=50 \Rightarrow 71-10x=0 \Rightarrow x=\frac{71}{10};\quad \frac{71}{10} \in [\sqrt{50},\sqrt{51}) \Rightarrow x=\frac{71}{10} \text{ 是一个解;}$$

$$x \in [\sqrt{51},\sqrt{52}) \Rightarrow \left[x^2\right]=51 \Rightarrow 72-10x=0 \Rightarrow x=\frac{36}{5};\quad \frac{36}{5} \in [\sqrt{51},\sqrt{52}) \Rightarrow x=\frac{36}{5} \text{ 是一个解;}$$

$$x \in [\sqrt{52},5+\sqrt{5}) \Rightarrow \left[x^2\right]=52 \Rightarrow 73-10x=0 \Rightarrow x=\frac{73}{10};\quad \frac{73}{10} \notin [\sqrt{52},5+\sqrt{5}) \Rightarrow \text{ 无解.}$$

7. 由题设条件, 令 $S_{ABC} = 7S$, $S_{CDE} = S$, 设 $S_{ACE} = x$.



因 $AC \parallel ED$, 三角形 ACE 与 ACD 的高 (即 EG 与 DH) 相等, 故 $S_{ACE} = S_{ACD}$. 从而,

$$S_{ACDE} = S_{ACE} + S_{CDE} = S + x;$$

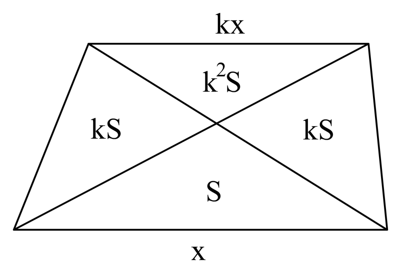
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABC} + S_{ACE} = 7S + x.$$

将其代入题设条件, 有

$$\frac{7S + x}{S + x} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2S.$$

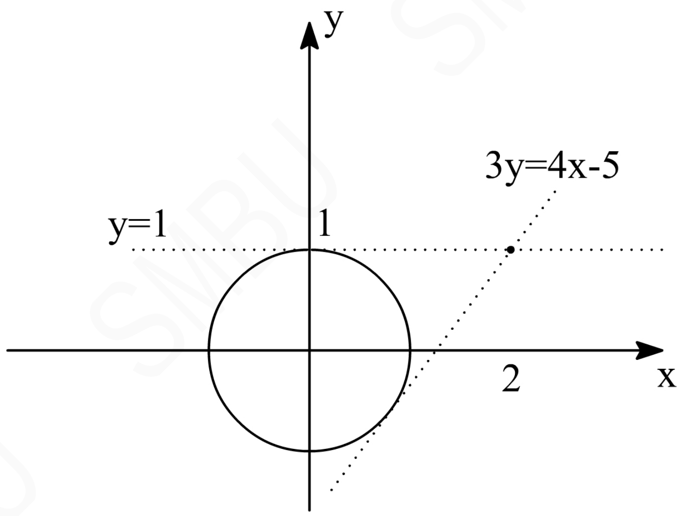
注意到 BC 与 AE 平行, 三角形 ABC 与 ACE 的高 (分别以 BC, AE 为底边) 相等, 从而

$$\frac{BC}{AE} = \frac{S_{ABC}}{S_{ACE}} = \frac{7S}{2S} = \frac{7}{2}.$$



若三角形 AOE 的面积等于 S, 则如图可计算梯形 $ABCE$ 的面积为 $(k+1)^2 S$. 这里, $S = 4$, $k = 7/2$.

8. 第一个方程可改写成 $\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(2x^2 + 2y^2 - xy + 2\right) = 0$. 第二个括号恒取正数值, 因此必有 $x^2 + y^2 = 1$.



因此, 只需找出参数 a 使得过点 $(2,1)$ 的直线

$$(6a+6)(x-2)+a^2(y-1)=0,$$

与圆 $x^2+y^2=1$ 交且仅交于一点.

满足条件的直线仅有两条: $y=1$ 与 $3y=4x-5$. 对于直线 $y=1$, 变量 x 的系数为 0, 故 $a=-1$; 对于直线 $4x-3y-5=0$, 变量 y 与 x 的系数比值为 $-3/4$, 从而

$$\frac{a^2}{6a+6}=-\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; 2a^2+9a+9=0 \;\Rightarrow\; a=-3,\; a=-\frac{3}{2}.$$