高三数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.D【解析】由已知选 D.

2.A【解析】设 $z=a+bi$，则 $a^2+(b+2)^2=a^2+b^2$，故 $b=-1$，故选 A.

3.D【解析】由图可知，选 D.

4.C【解析】由已知得 $a_8=0$，故 $S_{15}=15a_8=0$，故选 C.

5.A【解析】由已知得 $L_I=10\lg\left(\dfrac{5^{-10}}{10^{-12}}\right)=10\times(12-10\lg 5)=10\times(2+10\lg 2)\approx 50$，故选 A.

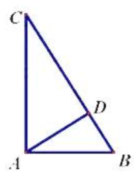
6.D【解析】最大面积的截面四边形为等腰梯形 $MNCA$，其中 $MN=\sqrt{2}, AC=2\sqrt{2}, AM=CN=\sqrt{5}$，高为 $h=\sqrt{5-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故面积为 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9}{2}$，所以选 D.

7.C【解析】由已知：圆心到直线的距离大于半径，即不妨设 $r>0$，$\dfrac{r^2}{\sqrt{13}}>r$，故 $r>\sqrt{13}=|OP|$,故选 C.

8.D【解析】由 $f'(x)=2e^x\cos x=0$，故 $x_1=-\dfrac{3\pi}{2}, x_2=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $|x_1+x_2|=2\pi$；由 $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right), f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上单调递减；$f(x_1)=e^{-\frac{3\pi}{2}}, f(x_2)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$，所以 $f(x_1)+f(x_2)=e^{-\frac{3\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}<0$，$|f(x_1)-f(x_2)|=e^{-\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}<1$，故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.ABD【解析】由已知 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{BC}|$；$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$；$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2$，因为 $|\overrightarrow{AC}|^2=3|\overrightarrow{AB}|^2$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$；故 $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，即 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AD}|$.故选 ABD.



10.AD【解析】$a=\log_3 2$，$b=\log_4 3$，故 $0<a<1, 0<b<1$，$ab=\dfrac{1}{2}$. $a+b>2\sqrt{ab}=\sqrt{2}$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_3 2}{\log_4 3}=\log_3 2\log_3 4<\left(\dfrac{\log_3 2+\log_3 4}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\log_3 8}{2}\right)^2<1$，所以 $a<b<1$.故选 AD.

11.BC【解析】设抛物线 E 方程为 $y^2=2px(p>0)$，$l_1: y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，联立得 $ky^2-2py-kp^2=0$，设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{2p}{k}$，$y_1y_2=-p^2$. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}+y_1y_2=-\dfrac{3}{4}p^2<0$，故

$\angle AOB$为钝角.所以$l_2: y=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，与抛物线联立得$y^2+2pky-p^2=0$，设$C\left(x_3,y_3\right),D\left(x_4,y_4\right)$，则$y_3+y_4=-2pk$，$y_3y_4=-p^2$.同理可得$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=-\frac{3}{4}p^2$，故$\angle COD$为钝角，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$.$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\left(x_1-\frac{p}{2}\right)\left(x_2-\frac{p}{2}\right)+y_1y_2=\left(1+\frac{1}{k^2}\right)y_1y_2=-p^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$，

$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=\left(x_3-\frac{p}{2}\right)\left(x_4-\frac{p}{2}\right)+y_3y_4=\left(1+k^2\right)y_3y_4=-p^2\left(1+k^2\right)$.故$k\neq\pm1$时，$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}\neq\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}$.所以选 BC.

12.BD【解析】由已知设球O的半径为R，则$4\pi R^2=36\pi$，所以$R=3$.设底面ABC的外接圆心为O_1，可知当ΔABC为正三角形时，其面积最大.设正三角形ABC的底面边长为a，$OO_1=d$，三棱锥的高为h.则$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+d^2=9$，故$a^2=3\left(9-d^2\right)$.所以三棱锥的体积：$V\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(3+d\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(27+9d-3d^2-d^3\right)$.令$M=27+9d-3d^2-d^3$，由$M'=-3(d-1)(3+d)=0$，得$d=1$.因为$d\in[0,3)$，故当$d=1$时，$M$取最大值，即三棱锥的体积取的最大值.此时可求得：$a=2\sqrt{6}$，即$AB=BC=AC=2\sqrt{6}$，$PA=PB=PC=2\sqrt{6}$.三棱锥$P-ABC$为正四面体，故$PA\perp BC,PB\perp AC$，故选 BD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.$\frac{3}{10}$【解析】甲入选的概率为$P=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

14.$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$【解析】由已知$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

15.$\left[\frac{1}{2},1\right)$【解析】设椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$PF_1=r_1,PF_2=r_2$，则$r_1+r_2=2a$，由余弦定理得$r_1^2+r_2^2-r_1r_2=4c^2$，故$r_1r_2=\frac{4}{3}\left(a^2-c^2\right)$，因为$r_1^2+r_2^2\geq2r_1r_2$，即$r_1^2+r_2^2-r_1r_2\geq r_1r_2$，故$4c^2\geq\frac{4}{3}\left(a^2-c^2\right)$，解得$e\geq\frac{1}{2}$，由$0<e<1$，所以$C$的离心率取值范围是$\left[\frac{1}{2},1\right)$.

16.$(\ln2,+\infty)$【解析】由$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，设切点为$\left(x_0,\frac{1}{x_0}+\ln x_0\right)$，则切线方程为：$y-\left(\frac{1}{x_0}+\ln x_0\right)=\frac{x_0-1}{x_0^2}\left(x-x_0\right)$，故$m=\frac{2}{x_0}-1+\ln x_0$有两根.令$g(x)=\frac{2}{x}-1+\ln x$，$g'(x)=\frac{x-2}{x^2}$，$g(x)$在$(0,2)$递减，在$(2,+\infty)$递增.因为$g(x)_{\min}=\ln2$，故实数$m$的取值范围是$(\ln2,+\infty)$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解】(1) 由 $a_n=2n+1$，所以 $a_1=3,a_2=5$，故 $b_2=2,b_3=4$.

所以等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=2$，……………………2 分

故 $b_1=1$，所以 $b_n=2^{n-1}$，即等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$ ……………………4 分

(2) 由已知得：$S_m=\dfrac{(3+2m+1)m}{2}=m(m+2)$

由(1)可知 $T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$ ……………………6 分

由 $T_n=S_m(4<n\le 10)$，所以 $2^n-1=m(m+2)$

即 $\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{n}{2}}+1\right)=m(m+2)$，故 $m=2^{\frac{n}{2}}-1$.……………………8 分

因为 m 正整数，$4<n\le 10$，所以 $n=6,m=2^3-1=7$，

$n=8,m=2^4-1=15$，$n=10,m=2^5-1=31$

故满足条件所有数对为 $(6,7),(8,15),(10,31)$.……………………10 分

18.【解】(1) 由频率分布直方图可知：样本数据在 $[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]$ 的频率分别为：$0.1,0.12,0.16,0.28,0.20,0.14$.……………………3 分

故调查表平均值为：

$$5\times0.1+15\times0.12+25\times0.16+35\times0.28+45\times0.20+55\times0.14$$
$$=0.5+1.8+4+9.8+9+7.7=32.8$$

所以该节目收看观众的平均时间为 32.8 分钟.……………………6 分

(2) 由(1)可知观看平均时间不低于 30 分钟的频率为：

$0.28+0.20+0.14=0.62$

所以观看平均时间不低于 30 分的样本数为：$150\times0.62=93$.……………………8 分

由已知可得 2×2 列联表如下：

	不满意	满意	总计
男	27	48	75
女	30	45	75
总计	57	93	150

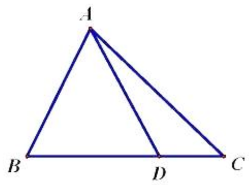
……………………10 分

$$K^2=\frac{150\times(30\times48-27\times45)^2}{75\times75\times93\times57}=\frac{150}{589}\approx0.2547<2.706$$

所以没有 90% 的把握认为"满意度与性别有关".……………………12 分

19.【解】(1) 在ΔABC中，

由正弦定理得：$\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin B}$①……………………2 分



由已知得：$AD\cdot\sin\angle BAC=AB\cdot\sin B$②

由①②联立得：$AD\cdot BC=AB\cdot AC$

因为$AD=BC$，所以$AD^2=AB\cdot AC$.

故AB,AD,AC成等比数列.……………………4 分

(2) 在ΔABC中，记A,B,C的对边分别为a,b,c，

故$AD=BC=a$.由 (1) 知：$a^2=bc$③

在ΔABD中，设$\angle ADB=\alpha$，由已知得$BD=\dfrac{2}{3}a$，

由余弦定理得$c^2=a^2+\dfrac{4}{9}a^2-\dfrac{4}{3}a^2\cos\alpha$④……………………6 分

在ΔACD中，设$\angle ADC=\pi-\alpha$，由已知得$CD=\dfrac{1}{3}a$，

由余弦定理得$b^2=a^2+\dfrac{1}{9}a^2+\dfrac{2}{3}a^2\cos\alpha$⑤

由⑤+④×2 整理得：$c^2+2b^2=\dfrac{11}{3}a^2$⑥……………………8 分

由③⑥联立整理得：$6b^2-11bc+3c^2=0$

解得：$b=\dfrac{3}{2}c$或$b=\dfrac{1}{3}c$

当$b=\dfrac{1}{3}c$时，可求得$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$，所以$a+b<c$故舍去.……………………10 分

当$b=\dfrac{3}{2}c$时，可求得$a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$，

在ΔABC中由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\dfrac{3}{2}c^2+c^2-\dfrac{9}{4}c^2}{2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}c^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{24}$.

综上：$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{24}$……………………12 分

20.【解】(1) 连接AD，由已知ΔABC为等边三角形，所以$AD\perp BC$.

由已知$DE\perp BC$，所以$BC\perp$平面ADE，……………………………2 分

又$AA_1\subset$平面ADE，$BC\perp AA_1$.

因为$AA_1//BB_1$，所以$BC\perp BB_1$，

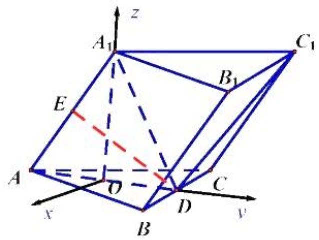
又侧面 BCC_1B_1 为平行四边形，所以侧面 BCC_1B_1 是矩形.……………………………4 分

（2）取 AD 中点 O，连接 OA_1.

由已知得 $AA_1=AD=\sqrt{3}$.

因为 $DE\perp AA_1$，

所以 $A_1D=AD=\sqrt{3}$，ΔADA_1 是等边三角形.



故 $A_1O\perp AD$，由（1）可知 $A_1O\perp BC$，

所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC.……………………………6 分

以 O 为原点，以 OD,OA_1 所在直线为 y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图.

故 $A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),D\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),A_1\left(0,0,\frac{3}{2}\right),C\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

所以 $\overrightarrow{AA_1}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{DA_1}=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$

设平面 A_1C_1D 的法向量为 $n=(x,y,z)$，则 $\dot{A_1C_1}\cdot n=0$，$\dot{DA_1}\cdot n=0$.

故 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y=0\\ y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $x=3,y=\sqrt{3},z=1$，则 $n=\left(3,\sqrt{3},1\right)$………………9 分

直线 AA_1 与平面 A_1C_1D 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},n\right\rangle\right|=\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot n}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\left|n\right|}=\frac{3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$ ……………………………11 分

故 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{130}}{13}$

所以直线 AA_1 与平面 A_1C_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{130}}{13}$.……………………………12 分

21.【解】（1）设点 P 的坐标为 (x,y)，由已知得 $x\neq\pm2$，

则直线 AP,BP 的斜率分别为：$k_{AP}=\frac{y}{x+2},k_{BP}=\frac{y}{x-2}$ ……………………………2 分

由已知 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=1$，化简得 $x^2-y^2=4$.

故曲线 C 的方程为：$x^2-y^2=4\ (y\neq0)$

所以曲线 C 是除去顶点的双曲线.……………………………4 分

（2）设直线 l 与 C 相切的切点坐标为 $(x_0,y_0)(y_0\neq0)$，斜率为 k

则直线 l 的方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$，与 $x^2-y^2=4$ 联立整理得：

$\left(1-k^2\right)x^2-2k\left(y_0-kx_0\right)x-\left(y_0-kx_0\right)^2-4=0$

由已知 $k^2\neq1$，且上方程有两个相等的实数根，

故 $4k^2\left(y_0-kx_0\right)^2+4\left(1-k^2\right)\left[\left(y_0-kx_0\right)^2+4\right]=0$

化简得：$\left(x_0^2-4\right)k^2-2x_0y_0k+y_0^2+4=0$①……………………………6 分

又 $x_0^2-y_0^2=4$，即 $x_0^2-4=y_0^2$，$y_0^2+4=x_0^2$②

由①②得，$y_0^2k^2-2x_0y_0k+x_0^2=0$，即 $\left(y_0k-x_0\right)^2=0$，所以 $k=\dfrac{x_0}{y_0}$

故直线 l 的方程为：$x_0x-y_0y=4$ ……………………………8 分

双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=x,y=-x$,所以 ΔOMN 为直角三角形.

不妨设 $x_0x-y_0y=4$ 与 $y=x$ 交点为 M，解得 $M\left(\dfrac{4}{x_0-y_0},\dfrac{4}{x_0-y_0}\right)$,

同理，设 $x_0x-y_0y=4$ 与 $y=-x$ 交点为 N，解得 $N\left(\dfrac{4}{x_0+y_0},\dfrac{4}{x_0+y_0}\right)$.…………10 分

可求得：$|OM|=\dfrac{4\sqrt{2}}{|x_0-y_0|}$，$|ON|=\dfrac{4\sqrt{2}}{|x_0+y_0|}$,

所以 ΔOMN 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|OM||ON|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{|x_0+y_0|}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{|x_0-y_0|}=\dfrac{16}{|x_0^2-y_0^2|}=4$

故 ΔOMN 的面积为定值.……………………………12 分

22.【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$

记 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{x^3e^x+2}{x^3}$.……………………………2 分

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.……………………3 分

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，记 $\varphi(x)=x^3e^x+2$，$\varphi'(x)=x^2(x+3)e^x$.

所以 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减；$x\in(-3,0)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增.

$\varphi(x)$ 的极小值为 $\varphi(-3)=2-\left(\dfrac{3}{e}\right)^3>0$，故 $\varphi(x)>0$.

故 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

综上：故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.……………………5 分

(2) 令 $F(x)=f(x)-ax=e^x+\dfrac{1}{x}-ax$，$F'(x)=f'(x)-a=e^x-\dfrac{1}{x^2}-a$

问题等价于$F(x)$有三个零点x_1,x_2,x_3，$x_1<0<x_2<1<x_3$

当$a\le 0$时，因为$x>0$，故$F(x)>0$，此时$F(x)$在$(0,+\infty)$无零点；………………6分

当$a>0$时，由（1）可知$F'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

由指数函数性质可知：$x\to 0,F'(x)\to -\infty;x\to +\infty,F'(x)\to +\infty$

故存在$x_0>0$，使得$F'(x_0)=0$.

$x\in(0,x_0)$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；

$x\in(x_0,+\infty)$，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增.

①若$a=e+1$，则$F(1)=e+1-a=0$，不符合题意；……………………8分

②若$0<a<e+1$，$F(1)=e+1-a>0$.

当$x_0\ge 1$时，$x\in(0,1)$，$F(x)>0$，不符合题意.

当$x_0<1$时，$x\in(1,+\infty)$，$F(x)>0$，不符合题意.……………………9分

③若$a>e+1$，则$F(1)=e+1-a<0$，$F'(1)=e-1-a<0$，所以$x_0>1$.

又$x\to 0,F(x)\to +\infty;x\to +\infty,F(x)\to +\infty$，

故存在$0<x_2<1<x_3$，使得$F(x_2)=F(x_3)=0$.……………………10分

此时当$x<0$时，$F'(x)<e^x-a<1-a<0$，

故$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

由$F(-1)=e^{-1}-1+a>0$，$F\left(-\frac{1}{a}\right)=e^{-\frac{1}{a}}-a+1<e^{-\frac{1}{a}}-e<0$

故存在$x_1<0$，使得$F(x_1)=0$

所以当$a>e+1$时，$F(x)$有三个零点x_1,x_2,x_3，$x_1<0<x_2<1<x_3$.

综上：实数a的取值范围是$(e+1,+\infty)$.……………………12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。