华大新高考联盟 2020 届高三 11 月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】D

【命题意图】本题主要考查集合的运算和一元二次不等式的解法.

【解析】因为 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|-1<x<2\}$,所以 $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$.

2.【答案】C

【命题意图】本题主要考查复数的几何意义.

【解析】因为 $z=\frac{1-2i}{1+2i}=\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$,所以复数 $z=\frac{1-2i}{1+2i}$所对应的复平面内的点为 $Z(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$,位于第三象限.

3.【答案】B

【命题意图】本题主要考查平面向量的数量积运算.

【解析】因为 $|3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|^2=9\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{b}^2+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9+16+24\times(-\frac{1}{2})=13$,所以 $|3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

4.【答案】B

【命题意图】本题主要考查空间直线与平面的位置关系.

【解析】①②错误;③④正确.

5.【答案】B

【命题意图】本题主要考查统计.

【解析】这 14 天中空气质量指数小于 100 的有 7 天,所以这 14 天中有 7 天空气质量优良,故选项 A 正确;这 14 天中空气质量指数的中位数是$\frac{86+121}{2}=103.5$,故选项 B 不正确;从 10 月 11 日到 10 月 14 日,空气质量指数越来越小,所以空气质量越来越好,故选项 C 正确;连续三天中空气质量指数离散程度最大的是 10 月 5 日至 10 月 7 日,所以连续三天中空气质量指数方差最大的是 10 月 5 日至 10 月 7 日,故选项 D 正确.

6.【答案】D

【命题意图】本题主要考查逻辑推理素养以及不等式和不等关系.

【解析】因为甲和湖南人不同岁,湖南人比乙年龄小,所以丙是湖南人. 又丙比海南人年龄大,湖南人比乙年龄小,所以乙不是海南人,从而乙是河南人,甲是海南人. 于是甲、乙、丙三人中,甲是海南人且年龄最小,乙是河南人且年龄最大,丙是湖南人且年龄居中.

7.【答案】A

【命题意图】本题主要考查等差数列的概念.

【解析】由 $a_{m+n}=a_m+a_n$,得 $a_{n+1}-a_n=a_1$,所以数列$\{a_n\}$是以 a_1 为首项,a_1 为公差的等差数列,从而 $a_n=na_1$. 因为 $a_{20}=1$,所以 $a_1=\frac{1}{20}$,$a_{2020}=101$.

8.【答案】D

【命题意图】本题主要考查函数的图像与性质.

【解析】因为 $f(x)$是奇函数,所以排除选项 B. 又 $f(x)=\frac{x^3}{3}+\sin x$,$f'(x)=x^2+\cos x$,$f''(x)=2x-\sin x$,$f'''(x)=2+\cos x>0$,所以 $f''(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $f''(0)=0$,所以当 $x\in(0,+\infty)$时,$f''(x)>0$,$f'(x)$单调递增,又 $f'(0)=1$,所以当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,从而排除选项 A 和 C.

9.【答案】A

【命题意图】本题主要考查椭圆的定义和简单几何性质.

【解析】因为在$\triangle PF_1F_2$中,$PF_2\perp F_1F_2$,$PF_1\perp QF_2$,所以$|F_1Q|\,|F_1P|=|F_1F_2|^2=4c^2$,又$|F_1Q|=\frac{2}{3}|F_1P|$,所以$\frac{2}{3}|F_1P|^2=4c^2$,从而$|F_1P|=\sqrt{6}c$,进而$|F_2P|=\sqrt{2}c$.所以$|F_1P|+|F_2P|=\sqrt{6}c+\sqrt{2}c=2a$,椭圆$C$的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

10.【答案】C

【命题意图】本题主要考查函数的奇偶性与周期性.

【解析】因为$f(x+1)$是偶函数,所以$f(-x+1)=f(x+1)$,从而$f(-x)=f(x+2)$;
因为$f(x-1)$是偶函数,所以$f(-x-1)=f(x-1)$,从而$f(-x)=f(x-2)$.
于是$f(x+2)=f(x-2)$,$f(x+4)=f(x)$,所以$f(x)$是以4为周期的函数.
因为$f(-x-1)=f(x-1)$,所以$f(-x-1+4)=f(x-1+4)$,即$f(-x+3)=f(x+3)$,
所以$f(x+3)$是偶函数.

11.【答案】C

【命题意图】本题主要考查排列组合.

【解析】分两类考虑:第一类,其中1个贫困村分配3名党员干部,另外3个贫困村各分配1名党员干部,此类分配方案种数为$C_6^3A_4^4=480$;第二类,其中2个贫困村各分配2名党员干部,另外2个贫困村各分配1名党员干部,此类分配方案种数为$\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_4^4=1080$.故不同的分配方案共有1560种.

12.【答案】C

【命题意图】本题主要考查三角函数的性质.

【解析】因为$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)\cdot\sin(2\pi-2x)=\sin x\cdot\sin(-2x)=-\sin x\cdot\sin 2x=-f(x)$,所以$y=f(x)$的图像关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称,故结论A正确;因为$f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)\cdot\sin(4\pi-2x)=\sin(-x)\cdot\sin(-2x)=\sin x\cdot\sin 2x=f(x)$,所以$y=f(x)$的图像关于直线$x=\pi$对称,故结论B正确;因为$f(x)=\sin x\cdot\sin 2x=2\sin^2x\cdot\cos x=2(1-\cos^2x)\cos x=-2\cos^3x+2\cos x$,令$\cos x=t$,则$t\in[-1,1]$,令$g(t)=-2t^3+2t$,$t\in[-1,1]$,则$g'(t)=-6t^2+2$,令$g'(t)=0$,得$t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$或$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$,$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,$g(-1)=0$,$g(1)=0$,所以$g(t)$的最大值是$\frac{4\sqrt{3}}{9}$,从而$f(x)$的最大值是$\frac{4\sqrt{3}}{9}$,故结论C错误;因为$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)\cdot\sin(2x+4\pi)=\sin x\cdot\sin 2x=f(x)$,所以$f(x)$是周期函数,故结论D正确.

二、填空题

13.【答案】$4\sqrt{3}\pi$

【命题意图】本题主要考查球的体积.

【解析】设球的半径为R,则$2R=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$,$R=\sqrt{3}$,从而球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

14.【答案】$y=\pm 2x$

【命题意图】本题主要考查双曲线的定义和简单几何性质.

【解析】不妨设双曲线中心为O,依题意,有$|OF_1|=c$,$|F_1Q|=b$,$|OQ_1|=a$,$|F_1F_2|=2c$,$|F_1P|=2b$,$|F_2P|=2a$,由双曲线定义$2b-2a=2a$,所以$b=2a$,双曲线C的两条渐近线方程为$y=\pm 2x$.

15.【答案】$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$

【命题意图】本题主要考查导数的几何意义.

【解析】设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=e^{x-2}$ 切于点 $P_1(x_1,e^{x_1-2})$，与曲线 $y=e^x-1$ 切于点 $P_2(x_2,e^{x_2}-1)$，则有 $k=e^{x_1-2}=e^{x_2}=\frac{(e^{x_2}-1)-e^{x_1-2}}{x_2-x_1}$，从而 $x_1-2=x_2$，$k=\frac{1}{2}$，$e^{x_2}=\frac{1}{2}$，$x_2=-\ln2$. 所以切线方程为 $y=\frac{1}{2}(x+\ln2)+e^{x_2}-1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}$，于是 $b=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}$.

16.【答案】$(n^2-2n+3)2^{n+1}-6$

【命题意图】本题主要考查等比数列的通项公式和数列求和的方法.

【解析】依题意，有 $\begin{cases}a_3=a_1q^2=2,\\ a_{10}=a_1q^9=256,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{2},\\ q=2.\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}=2^{n-2}$.

设数列 $\{4n^2a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n

则 $T_n=1^2\cdot2^1+2^2\cdot2^2+\cdots+n^22^n$，(1)

$2T_n=1^2\cdot2^2+2^2\cdot2^3+\cdots+n^22^{n+1}$. (2)

用(1)−(2)，得 $-T_n=1\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+(2n-1)2^n-n^22^{n+1}$，(3)

$-2T_n=1\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(2n-1)2^{n+1}-n^22^{n+2}$. (4)

用(3)−(4)，得 $T_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^n-n^22^{n+1}+(2n^2-2n+1)2^{n+1}=(n^2-2n+3)2^{n+1}-6$.

三、解答题

17.【命题意图】本题主要考查正弦定理、余弦定理以及三角形面积公式.

【解析】(1)在△ABC 中，$a\cos B=4$，$b\sin A=3$.

由正弦定理得 $\frac{b\sin A}{a\cos B}=\frac{\sin B\sin A}{\sin A\cos B}=\tan B=\frac{3}{4}$. ………… 3 分

又 $a\cos B=4$，所以 $\cos B>0$，所以 $\cos B=\frac{4}{5}$. ………… 5 分

所以 $a=5$. ………… 6 分

(2)由(1)知，$\cos B=\frac{4}{5}$，所以 $\sin B=\frac{3}{5}$. ………… 7 分

因为△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=9$，所以 $c=6$. ………… 9 分

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=13$，所以 $b=\sqrt{13}$. ………… 11 分

所以△ABC 的周长为 $a+b+c=11+\sqrt{13}$. ………… 12 分

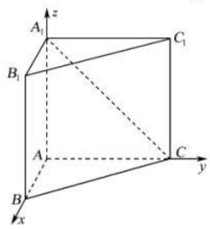
18.【命题意图】本题主要考查二面角的求法，同时考查数学文化.

【解析】(1)在△ABC 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle ABC=60^\circ$，

由正弦定理得 $\angle ACB=30^\circ$，所以 $\angle BAC=90^\circ$，即 $BA\perp AC$. ………… 3 分

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是堑堵. ………… 5 分

(2)以点 A 为坐标原点，以 AB，AC，AA_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. ………… 6 分



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$.

于是 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$. ………… 7 分

设平面 A_1BC 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$. ………… 9 分

又可取 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 为平面 AA_1C 的一个法向量， ………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 11 分

所以二面角 $A-A_1C-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 12 分

19.【命题意图】本题主要考查曲线与方程、直线与抛物线的位置关系.

【解析】(1)设点 $P(x,y)$ 是曲线 C 上任意一点， ………………………………………… 1 分

那么点 $P(x,y)$ 满足：$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-x=1(x>0)$. ………………………………………… 3 分

化简得曲线 C 的方程为 $y^2=4x(x>0)$. ………………………………………… 5 分

(2)由题意得，直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$， ………………………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$. ………………………………………… 8 分

因为 $\Delta=16k^2+16>0$，故 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$. ………………………………………… 10 分

由题设知 $\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=-1$ 或 $k=1$. ………………………………………… 11 分

因此直线 l 的方程为 $y=-x+1$ 或 $y=x-1$. ………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题主要考查利用导数判断函数单调性的方法和函数零点的概念.

【解析】(1)$g(x)=\sin 2x-x$，$g'(x)=2\cos 2x-1$. ………………………………………… 1 分

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$g'(x)<0$， ………………………………………… 2 分

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减. ………………………………………… 3 分

而 $g(0)=0$，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$， ………………………………………… 4 分

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$g(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上无零点. ………………………………………… 5 分

(2)$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$. ………………………………………… 6 分

①当 $x\in(-1,0)$ 时，$\sin 2x<0$，$\ln(1+x)<0$，

所以 $f(x)=\sin 2x+\ln(1+x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上无零点. ………………………………………… 7 分

②当 $x=0$ 时，$f(x)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个零点. ………………………………………… 8 分

③当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，由(1)知 $g(x)>0$，所以 $\sin 2x>x$，又 $x\geqslant\ln(1+x)$，

所以 $f(x)=\sin 2x-\ln(1+x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上无零点. ………………………………………… 9 分

④当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 时，$f(x)=\sin 2x-\ln(1+x)$，$f'(x)=2\cos 2x-\dfrac{1}{1+x}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递减.

而 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)<0$，从而 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上有唯一零点. ………………………………………… 10 分

⑤当 $x\in\left(\frac{3\pi}{4},+\infty\right)$ 时，$\ln(1+x)>1$，所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4},+\infty\right)$ 上无零点. ………… 11 分

综上，$f(x)$ 有且仅有 2 个零点. ………… 12 分

21.【命题意图】本题主要考查随机事件的概率和等比数列的概念、通项公式及前 n 项和公式.

【解析】(1)棋子开始在第 0 站是必然事件，所以 $P_0=1$. ………… 1 分

棋子跳到第 1 站，只有一种情形，第一次掷骰子出现奇数点，其概率为 $\frac{1}{2}$，所以 $P_1=\frac{1}{2}$. ………… 2 分

棋子跳到第 2 站，包括两种情形，①第一次掷骰子出现偶数点，其概率为 $\frac{1}{2}$；②前两次掷骰子出现奇数点，其概率为 $\frac{1}{4}$，所以 $P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. ………… 3 分

棋子跳到第 $n(2\leqslant n\leqslant 99)$ 站，包括两种情形，①棋子先跳到第 $n-2$ 站，又掷骰子出现偶数点，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；②棋子先跳到第 $n-1$ 站，又掷骰子出现奇数点，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

故 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$. ………… 4 分

(2)由(1)知，$P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$，所以 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$. ………… 6 分

又因为 $P_1-P_0=-\frac{1}{2}$，………… 7 分

所以 $\{P_n-P_{n-1}\}(n=1,2,\cdots,100)$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. ………… 8 分

(3)由(2)知，$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. ………… 9 分

所以 $P_{99}=(P_{99}-P_{98})+(P_{98}-P_{97})+\cdots+(P_1-P_0)+P_0$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{98}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+1$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right).$$ ………… 11 分

所以玩该游戏获胜的概率为 $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)$. ………… 12 分

22.【命题意图】本题主要考查参数方程与普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化.

【解析】(1)因为 $-1<\frac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant 1$，且 $x^2+y^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1$，

所以 C 的普通方程为 $x^2+y^2=1(x\neq -1)$. ………… 3 分

l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y+4=0$. ………… 5 分

(2)由(1)可设 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数，$-\pi<\alpha<\pi$). ………… 6 分

C 上的点到 l 的距离为 $\frac{|\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha+4|}{2}=\frac{2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+4}{2}$. ………… 8 分

当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，$2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+4$ 取得最大值 6，故 C 上的点到 l 距离的最大值为 3. ………… 10 分

23.【命题意图】本题主要考查不等式的证明和基本不等式的应用.

【解析】(1)因为 a,b 为正数,且 $a+b=1$,

所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立. ………… 2分

所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1+\frac{a+b+1}{ab}=1+\frac{2}{ab}\geqslant 9$, ………… 4分

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立. ………… 5分

(2)不妨设 $a=\frac{1}{2}+\delta,b=\frac{1}{2}-\delta,0\leqslant\delta<\frac{1}{2}$, ………… 7分

则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=\frac{\left(\delta^2+\delta+\frac{5}{4}\right)\left(\delta^2-\delta+\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\delta\right)}=\frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}\delta^2+\delta^4}{\frac{1}{4}-\delta^2}\geqslant\frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4}$. … 9分

当且仅当 $\delta=0$,即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立. ………… 10分