江西省重点中学协作体 2023 届高三第二次联考
数学试卷(理科)答案

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	A	C	D	A	A	A	B	C	A	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、 5　　14、 $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$　　15、 $(-\infty,2e]$　　16、 $\frac{9}{16}$

12、【解】易解得 $g(x)=\dfrac{2023^{x}+2023^{-x}}{2}$

$\therefore$ 令 $F(t)=f(t-2023)=2023^{-|t|}-\lambda g(t)-2\lambda^{2}$ $\because F(t)=2023^{-|t|}-\lambda\dfrac{2023^{t}+2023^{-t}}{2}-2\lambda^{2}$ 有唯一零点，且

$F(t)$ 是偶函数，

所以 $F(0)=0$，$\therefore 1-\lambda-2\lambda^{2}=0$

$\therefore \lambda=-1$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{2}$

若 $\lambda=-1$ 时，则 $F(t)=2023^{-|t|}+\dfrac{2023^{t}+2023^{-t}}{2}-2$

当 $t>0$ 时，则令 $2023^{-t}+\dfrac{2023^{t}+2023^{-t}}{2}-2=0$ 解得 $2023^{t}=3$ $\therefore t=\log_{2023}{3}>0$（不合题意舍去）

若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，则 $F(t)=2023^{-|t|}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2023^{t}+2023^{-t}}{2}-\dfrac{1}{2}$

$\because F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减 $\therefore F(t)<F(0)=0$

$\because F(t)$ 是偶函数 $\therefore F(t)$ 只有唯一零点 0

$\therefore f(x)$ 只有唯一零点 2023

综上：$\lambda=\dfrac{1}{2}$

16、【解】由题意，知直线 AB 的斜率不为 0，故设直线 AB 的方程为 $x=my+4$，如图，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$.

将直线 AB 的方程代入圆 E 的方程中，消去 x，得 $(m^2+1)y^2=12$，

所以 $y^2=\dfrac{12}{m^2+1}$，所以 $y_2=-y_1$，且 $y_1^2=y_2^2=\dfrac{12}{m^2+1}$.

直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，代入抛物线方程 $y^2=4x$，

消去 x，得 $y^2=\dfrac{4x_1}{y_1}y$，解得 $y=\dfrac{4x_1}{y_1}$ 或 $y=0$，所以 $y_3=\dfrac{4x_1}{y_1}$.

同理，得 $y_4=\dfrac{4x_2}{y_2}$，

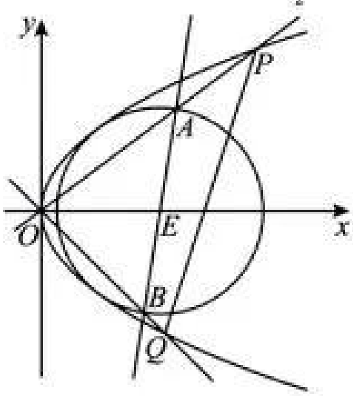
所以 $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\cdot|OP|\cdot|OQ|\sin\angle POQ}=\frac{|OA|}{|OP|}\cdot\frac{|OB|}{|OQ|}=\frac{|y_1|}{|y_3|}\cdot\frac{|y_2|}{|y_4|}=\frac{|y_1|}{\left|\frac{4x_1}{y_1}\right|}\cdot\frac{|y_2|}{\left|\frac{4x_2}{y_2}\right|}$$

$$=\frac{(y_1y_2)^2}{16|x_1x_2|}=\frac{(y_1y_2)^2}{16|(my_1+4)(my_2+4)|}=\frac{(y_1y_2)^2}{16|m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16|}$$

$$=\frac{(y_1y_2)^2}{16|m^2y_1y_2+16|}=\frac{\left(-\frac{12}{m^2+1}\right)^2}{16\left|m^2\left(-\frac{12}{m^2+1}\right)+16\right|}$$

$$=\frac{9}{4(m^2+1)(m^2+4)}=\frac{9}{4\left(m^2+\frac{5}{2}\right)^2-9},$$

所以当 $m=0$ 时，$\dfrac{S_1}{S_2}$ 取得最大值，为 $\dfrac{9}{16}$.



三、解答题：评分细则

17、【解】(1) 有已知得 $d>0$, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 不防设 $a_m=16, a_n=26$, 且 $n>m>1$

$\therefore d=\dfrac{a_m-a_1}{m-1}=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$ 即 $\dfrac{15}{m-1}=\dfrac{25}{n-1}$ $\therefore 3(n-1)=5(m-1)$ ……………………………3 分

$\because m$ 与 n 越小 d 越大

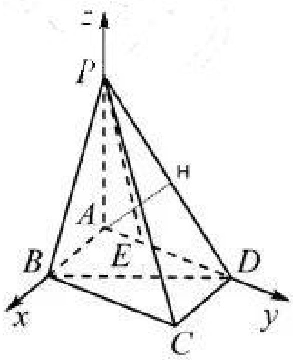
$\begin{cases} n-1=5 \\ m-1=3 \end{cases} \therefore \begin{cases} m=4 \\ n=6 \end{cases} \therefore d=5 \therefore a_n=5n-4\left(n\in N^*\right)$

……………………………………………6 分

由 (1) 知: $a_n=5n-4$ $\therefore \dfrac{1}{(5n+1)(5n-4)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5n-4}-\dfrac{1}{5n+1}\right)$ ………………………9 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{11}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{5n-4}-\dfrac{1}{5n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{5n+1}\right)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25n+5}\left(n\in N^*\right)$ ………………………………………………12 分



18、【解】

(1) 过点 A 作 $AH\perp PD$ 垂足为 H ……………………………………………1 分

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PCD ， 平面 $PAD\cap$ 平面 $PCD=PD$

$AH\subset$ 平面 PAD $AH\perp PD$

$\therefore AH\perp$ 平面 PCD ………………………………………………3 分

又$\because CD \subseteq$ 平面PCD

$\therefore AH \perp CD$ $\because AB \parallel CD$ $\therefore AB \perp AH$ ……………………………5 分

$\because AB \perp AD$ $AH \cap AD = A$

$\therefore AB \perp$ 平面PAD …………………………………… 6 分

（2）由（1）知 $AB \perp$ 平面 PAD $\therefore AB \perp PA$

$\therefore$ 在 Rt 三角形 PAB 中，$\angle PAB = 90^0$ $PB = \sqrt{10}$ $AB = 1$ $\therefore PA = 3$

在 ΔPAD 中，$PA = 3, AD = 3, PD = 3\sqrt{2}$

$\therefore PA^2 + AD^2 = PD^2$ $\therefore PA \perp AD$ 又$\because AB \perp PA, AB \perp AD$ …………… 8 分

$\therefore$ 以点 A 为坐标原点，分别以 AB, AD, AP 方向为 X 轴 Y 轴 Z 轴建立坐标系如图所示

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,3,0), P(0,0,3), E(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB} = (1,0,-3), \overrightarrow{BD} = (-1,3,0), \overrightarrow{PE} = (0,1,-3)$，

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = x - 3z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + 3y = 0 \end{cases}$

令 $x = 3$，可得 $y = 1, z = 1$，所以 $\vec{n} = (3,1,1)$，…………………………………… 10 分

设 PE 与平面 PBD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta = \left|\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{PE} \rangle\right| = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PE}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{PE}|} = \dfrac{2}{\sqrt{11} \times \sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{110}}{55}$，

所以 PE 与平面 PBD 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{110}}{55}$. …………………………………… 12 分

19【解】（1）由题知，X 的取值可能为 $1,2,3$，所以 $P(X=1) = \left(\dfrac{1}{C_3^1}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$；

$P(X=2) = \left[1 - \left(\dfrac{1}{C_3^1}\right)^2\right]\left(\dfrac{1}{C_4^1}\right)^2 = \dfrac{1}{18}$；$P(X=3) = \left[1 - \left(\dfrac{1}{C_3^1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\dfrac{1}{C_4^1}\right)^2\right] = \dfrac{5}{6}$；

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{6}$

……………………………………2 分

所以数学期望为 $EX=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{18}+3\times\frac{5}{6}=\frac{19}{18}$. …………………………………… 3 分

（2）令 $x_i=\frac{1}{t_i}$，则 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，由题知：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=170,\overline{y}=50$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{170-5\times0.46\times50}{1.46-5\times0.212}=137.5$， …………………………………… 4 分

所以 $\hat{a}=50-137.5\times0.46=-13.25,\hat{y}=137.5x-13.25$，

故所求的回归方程为：$\hat{y}=\dfrac{137.5}{t}-13.25$，

所以，估计 $t=6$ 时，$\hat{y}\approx9$；估计 $t=7$ 时，$\hat{y}\approx6$；估计 $t=8$ 时，$\hat{y}\approx3$；

估计 $t=9$ 时，$\hat{y}\approx2$；估计 $t\geq10$ 时，$\hat{y}<0$；预测成功的总人数为 270 .……………………6 分

（3）由题知，在前 n 轮就成功的概率为

…… 8 分

$$P=\frac{1}{3^2}+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{4^2}+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\frac{1}{5^2}+\cdots+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{(n+2)^2}$$

又因为在前 n 轮没有成功的概率为

$$1-P=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+3}{n+2}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{n+3}{n+2}>\frac{2}{3}$$

……………………………………10 分

故 $\frac{1}{3^2}+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{4^2}+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\frac{1}{5^2}+\cdots+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{3}$ ……12 分

20、【解】（1）设点 $P(x_0,y_0)$，由题易知切线 l_0 的方程为 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$，

同理，设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),Q(m,n)$，则切线 l_1,l_2 的方程分别为：

$x_1x+y_1y=4, x_2x+y_2y=4$，又点 Q 在直线 l_1,l_2 上，所以 $\begin{cases} x_1m+y_1n=4 \\ x_2m+y_2n=4 \end{cases}$

所以直线 l_0 的方程为：$mx+ny=4$，所以 $\begin{cases} x_0=\dfrac{m}{2} \\ y_0=\dfrac{n}{4} \end{cases}$，又 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 C_1 上，

所以 $\dfrac{m^2}{8}+\dfrac{n^2}{16}=1$，即点 Q 的轨迹 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ……………………………5 分

(2)设点 $A(x_3,y_3),B(x_4,y_4),R(4,\ t),\ T(x_T,y_T)$，则由 $|AR||TB|=|AT||RB|$ 知 $\dfrac{|AR|}{|RB|}=\dfrac{|AT|}{|TB|}$，

设 $\dfrac{|AR|}{|RB|}=\dfrac{|AT|}{|TB|}=\lambda$，易知 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$，则由已知知：$\overrightarrow{AR}=-\lambda\overrightarrow{RB},\overrightarrow{AT}=\lambda\overrightarrow{TB}$……… 6 分

由线段定比分点坐标公式知：$\begin{cases} \dfrac{x_3-\lambda x_4}{1-\lambda}=4 \\ \dfrac{y_3-\lambda y_4}{1-\lambda}=t \end{cases}$ 且 $\begin{cases} \dfrac{x_3+\lambda x_4}{1+\lambda}=x_T \\ \dfrac{y_3+\lambda y_4}{1+\lambda}=y_T \end{cases}$ …………………… 8 分

又 $A(x_3,y_3),B(x_4,y_4)$ 在曲线 E 上，所以 来源：高三答案公众号

$\begin{cases} \dfrac{x_3^2}{8}+\dfrac{y_3^2}{16}=1 \\ \dfrac{x_4^2}{8}+\dfrac{y_4^2}{16}=1 \end{cases}\Rightarrow 2\dfrac{x_3^2-\lambda^2x_4^2}{1-\lambda^2}+\dfrac{y_3^2-\lambda^2y_4^2}{1-\lambda^2}=16$ ……………………………………… 10 分

$\Rightarrow 8x_T+ty_T=16$，所以动点 T 的轨迹过定点 $(2,0)$ ……………………………………… 12 分

21、【解】(1) 易知 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}-\dfrac{1}{k}$，即方程 $f'(x)=0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有解，………………1 分

令 $h(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{-\sin x-\cos x}{e^x}<0$，即 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，……… 3 分

又 $h(0)=1,h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $\dfrac{1}{k}\in(0,1)$，即 $k>1$ ……………………………………… 5 分

(2) 解由题意知：$g'(x)=e^x-k\cos x=-ke^x\left(\dfrac{\cos x}{e^x}-\dfrac{1}{k}\right)$

由（1）可知：$x\in(0,\vartheta)$ 时，$g'(x)<0$，$x\in(\vartheta,\ \pi)$ 时，$g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\vartheta)$ 单调递减，在 $(\vartheta,\ \pi)$ 单调递增。……………………………………… 6 分

又 $g(0)=0,g(\pi)=e^{\pi}-1>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\vartheta)$ 内无零点，$g(x)$ 在 $(\vartheta,\ \pi)$ 内存在唯一零点 φ，且 $\varphi\in(\vartheta,\ \pi)$。 ……………………………………… 7 分

由（1）可知，$e^{\vartheta}=k\cos\vartheta>1$

所以 $g(2\vartheta)=e^{2\vartheta}-k\sin2\vartheta-1=e^{2\vartheta}-2e^{\vartheta}\sin\vartheta-1,\vartheta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$……………………………8 分

令 $F(x)=e^{2x}-2e^x\sin x-1,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

则 $F'(x)=2e^{2x}-2e^{x}(\sin x+\cos x)=2e^{x}(e^{x}-\sin x-\cos x), x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $F'(0)=0$ ………9 分

令 $G(x)=e^{x}-\sin x-\cos x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$来源：高三答案公众号

则 $G'(x)=e^{x}-\cos x+\sin x>1-\cos x+\sin x>0$

所以，函数 $G(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$G(x)>G(0)=0$， ……………10 分

故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$F'(x)>0$，所以，函数 $F(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，

因为 $0<\vartheta<\dfrac{\pi}{2}$，$g(2\vartheta)=F(\vartheta)>0$，$g(\varphi)=0$，所以，$g(2\vartheta)>g(\varphi)=0$， …………………11 分

因为 $g(x)$ 在 $(\vartheta，\pi)$ 上为增函数，且 $2\vartheta\in(\vartheta，\pi)$，$\varphi\in(\vartheta，\pi)$，所以 $\varphi<2\vartheta$ ………………12 分

22、【解】(1)在双纽线 C 上任取一点 $M(\rho,\theta)$,

在 ΔMOF_1 中,$|MF_1|=\sqrt{\rho^2+a^2-2\rho a\cos(2\pi-\theta)}$, …………………………………… 1 分

在 ΔMOF_2 中,$|MF_2|=\sqrt{\rho^2+a^2-2\rho a\cos\theta}$. ……………………………………2 分

由题意 $|MF_1||MF_2|=a^2$, 整理得: $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$. ……………………………………5 分

(2)令 $\theta=0$ 得 $P(\sqrt{2}a,0)$ …………………………………… 6 分

$S_{\Delta OPM}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2a^2\cos 2\theta}\cdot\sin\theta=a^2\sqrt{\cos 2\theta\cdot\sin^2\theta}=a^2\sqrt{(1-2\sin^2\theta)\cdot\sin^2\theta}$,

…………………………………… 8 分

则当 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$ 时,ΔOPM 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2$ ……………………………10 分

23、【解】(1) 因为 $a>0,b>0,c>0$, 则

$a^3+b^3+1^3\geq 3a\cdot b\cdot 1=3ab$,

$b^3+c^3+1^3\geq 3b\cdot c\cdot 1=3bc$, ………………………………………………………………3 分

$c^3+a^3+1^3\geq 3c\cdot a\cdot 1=3ca$,

则 $a^3+b^3+c^3+3\times 1^3\geq 3(ab+bc+ca)=9$, ……………………………………………4 分

所以 $a^3+b^3+c^3\geq 3$, 当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立, $a^3+b^3+c^3$ 的最小值为 $M=3$. …5 分

(2) 因为 $|x-m|-|x+1|\leq|(x-m)-(x+1)|\leq|m+1|$, ………………………………7 分

当且仅当 $(x-m)(x+1)\geq 0$ 且 $|x-m|\geq|x+1|$ 时取最大值 $|m+1|$ ……………………8 分

由题意得: $y=|x-m|-|x+1|$ 的最大值为 $|m+1|>3$, ………………………………9 分

解得: $m\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$. …………………………………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线