2023—2024 学年高三质量检测（一）

数学参考答案

一、选择题本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	D	A	C	B	B

二、选择题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AB	AC	ACD	ACD

三、填空题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　14．160　　15．$\frac{5}{3}$　　16．$[\frac{4}{3}，2]$

四、解答题本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

解：（1）设该等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

由已知得$\begin{cases} a_1+d=a_1q \\ a_1+3d=a_1q^2 \end{cases}$，……2 分

因为数列$\{a_n\}$为正项数列，$\{b_n\}$为正项递增数列，

所以$q=2$，$d=1$，……4 分

所以$a_n=1+(n-1)\times 1=n$，$b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$．……6 分

（2）由已知得$c_n=\begin{cases} n，n为奇数 \\ 2^{n-1}，n为偶数 \end{cases}$，……7 分

所以数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为

$$T_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$$

$=(1+3+\cdots+2n-1)+(2^1+2^3+\cdots+2^{2n-1})$……8 分

$$=\frac{(1+2n-1)n}{2}+\frac{2^1\times(1-4^n)}{1-4}$$

$=\frac{3n^2+2^{2n+1}-2}{3}$．……10 分

18．（12 分）

证：（1）∵底面$ABCD$为正方形，

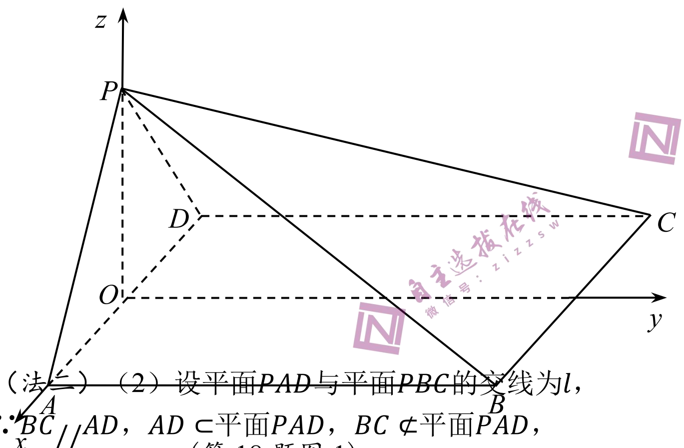
∴$AB\perp AD$，……1 分

又∵$AB\perp PD$，$AD\cap PD=D, AD，PD\subset$平面$PAD$，……3 分

∴$AB\perp$平面PAD，……4 分

∵$AB \subset$平面$ABCD$， .... 5 分
∴平面$PAD \perp$平面$ABCD$． .... 6 分
解：（法一）（2）取AD中点为O，连结PO，
∵在$\triangle PAD$中，$PA = PD$，$\angle PDA = 60°$，
∴$PO \perp AD$, $\triangle PAD$为等边三角形．
∵平面$PAD \perp$平面$ABCD$，平面$PAD \cap$平面$ABCD = AD$，$PO \subset$平面PAD，
∴$PO \perp$平面$ABCD$， .... 7 分
以O为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，
设底面正方形$ABCD$的边长为 2，
∴$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，
∴$\overrightarrow{PB} = (1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC} = (-1,2,-\sqrt{3})$， .... 9 分
设平面PBC的一个法向量$\boldsymbol{m} = (x,y,z)$，
则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m} = 0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m} = 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x + 2y - \sqrt{3}z = 0\\ -x + 2y - \sqrt{3}z = 0\end{cases}$，
令$y = 3$，则$x = 0$，$z = 2\sqrt{3}$，
∴$\boldsymbol{m} = (0,3,2\sqrt{3})$， .... 10 分
由（1）可知平面PAD的一个法向量$\boldsymbol{n} = (0,1,0)$， ....11 分
设平面PAD与平面PBC的夹角为θ，
则$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \frac{3}{\sqrt{21}\times 1} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

∴平面PAD与平面PBC夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$． .... 12 分



（第 18 题图 1）

（法二）（2）设平面PAD与平面PBC的交线为l，
∵$BC // AD$，$AD \subset$平面PAD，$BC \not\subset$平面PAD，
∴$BC //$平面PAD，
又∵$BC \subset$平面PBC，
∴$BC // l$，$AD // l$，
∵平面PAD与平面PBC有一个交点P，
∴l为过点P且与BC平行的一条直线，如下图， .... 7 分
取AD中点为O，取BC中点为M，连结PO，PM，OM，
∵底面四边形$ABCD$为正方形，O，M分别为AD，BC的中点，
∴$OM // AB$，
又∵$AB \perp$平面PAD，
∴$OM \perp$平面PAD， .... 8 分
∵$l \subset$平面PAD，

$\therefore OM \perp l$，

$\because$ 在$\triangle PAD$中，$PA = PD$，O为AD的中点，

$\therefore PO \perp AD$，$PO \perp l$，

又$PO \cap OM = O$，PO，$OM \subset$平面PAD，

$\therefore l \perp$平面POM，

$\therefore l \perp PM$，

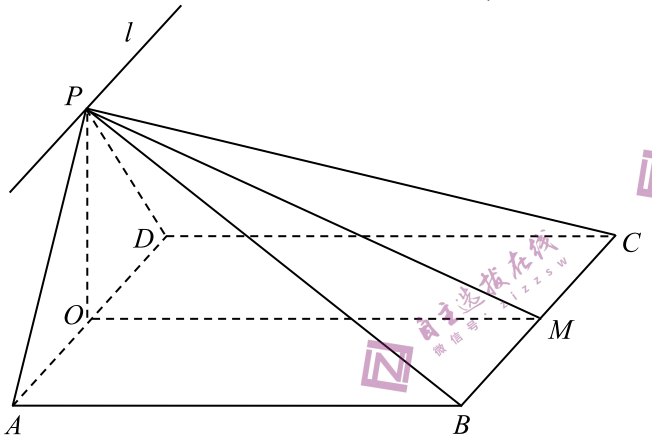
又$\because \angle OPM$为锐角，

$\therefore \angle OPM$为平面PAD与平面PBC的夹角，... 10 分

设底面正方形$ABCD$的边长为 2，

在$\triangle POM$中，$PM = \sqrt{PO^2 + OM^2} = \sqrt{7}$，$\cos \angle POM = \frac{PO}{PM} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore$平面PAD与平面PBC夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$. .... 12 分



（第 18 题图 2）

19. （12 分）

解：（1）由正弦定理得$\sin C \cos B + 3 \sin B \cos C = \sin A - \sin B$，.. 2 分

因为$\sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C)$，

所以$\sin C \cos B + 3 \sin B \cos C = \sin(B + C) - \sin B$，... 3 分

即$\sin C \cos B + 3 \sin B \cos C = \sin B \cos C + \cos B \sin C - \sin B$，

$2 \sin B \cos C = -\sin B$，

而$\sin B \neq 0$，

所以$\cos C = -\frac{1}{2}$，... 5 分

又因为$C \in (0, \pi)$，

所以$C = \frac{2\pi}{3}$. .... 6 分

（2）因为$\cos B = \frac{13}{14}$，$B \in (0, \pi)$，

所以$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$，.. 7 分

$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos \frac{2\pi}{3} + \cos B \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$，.. 8 分

由正弦定理$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$，得$\frac{5}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{b}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

解得$b=3$，$c=7$，…………………………………………………………………………… 10 分
则$AD=c-BD=2$，

所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AD\times b\times \sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{14}$. …………………………………… 12 分

20．（12 分）

解：（1）记“质检员甲认定一箱产品合格”为事件A，“该箱产品不含次品”为事件B，

则$P(A)=0.8\times 1+0.1\times\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+0.1\times\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{12}$，…………………………………………… 3 分

$P(AB)=0.8=\frac{4}{5}$，…………………………………………………………………………… 4 分

由条件概率公式得$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{11}{12}}=\frac{48}{55}$，

所以在质检员甲认定一箱产品合格的条件下，该箱产品不含次品的概率为$\frac{48}{55}$. ………… 6 分

（2）由题意可得X可以取0，1，2，…………………………………………………… 7 分

则$P(X=0)=P(A)=\frac{11}{12}$，………………………………………………………………… 8 分

$P(X=1)=0.1\times\frac{C_1^1\cdot C_9^2}{C_{10}^3}+0.1\times\frac{C_2^1\cdot C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{23}{300}$，………………………………………… 9 分

$P(X=2)=0.1\times\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{150}$，…………………………………………………………… 10 分

所以随机变量X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{11}{12}$	$\frac{23}{300}$	$\frac{1}{150}$

………………………………………………………………………………………………11 分

所以$E(X)=0\times\frac{3}{25}+1\times\frac{23}{300}+2\times\frac{1}{150}=\frac{9}{100}$. ………………………………………… 12 分

21．（12 分）

解：（1）$f'(x)=e^x-m$，………………………………………………………………… 1 分
当$m\leqslant 0$时，由$f'(x)>0$，$f(x)$在$\boldsymbol{R}$上单调递增，……………………………………… 2 分
当$m>0$时，由$f'(x)=0$，可得$x=\ln m$，
∴$x\in(-\infty,\ln m)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；……………………………………… 3 分
$x\in(\ln m,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. …………………………………… 4 分
∴当$m\leqslant 0$时，$f(x)$在$\boldsymbol{R}$上单调递增；
当$m>0$时，$f(x)$在区间$(-\infty,\ln m)$上单调递减，在区间$(\ln m,+\infty)$上单调递增.

（2）设$g(x)=e^x-mx+\ln(x+1)-1(x\geqslant 0)$，则$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-m$，……………… 5 分

（i）当$m\leqslant$ □1时，$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-m\geqslant$ □$1-m\geqslant 0$，………………………………… 6 分

∴$g(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，则$g(x)\geqslant g(0)=0$恒成立，…………………………… 7 分

（ii）当$m>1$时，令$h(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-m$，则$h'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}$，……………………… 8 分

令$k(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}$，则$k'(x)=e^x+\frac{2}{(x+1)^3}>0$，

∴$k(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，则$k(x)\geqslant k(0)=0$，

∴$h(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，则$h(x)\geqslant h(0)=2-m$，……………………………………………… 9 分

①若$1<m\leqslant 2$，则$g'(x)\geqslant 0$恒成立，则$g(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，

∴$g(x)\geqslant g(0)=0$，……………………………………………………………………………………… 10 分

②若$m>2$，则$g'(0)<0$，$g'(\ln m+1)=(e-1)m+\frac{1}{2+\ln m}>0$，

∴$\exists x_0\in(0,\ln m+1)$，使得$g'(x_0)=0$，

∴$g(x)$在区间$[0,x_0)$上单调递减，则$g(x_0)<g(0)=0$，与条件矛盾，……………………………11 分

综上所述，实数m的取值范围为$(-\infty,2]$．…………………………………………………………… 12 分

22．（12 分）

解：（1）由双曲线定义可知$||MF_1|-|MF_2||=2a=2$，∴$a=1$，……………………………………… 1 分

又由$|F_1F_2|=4$，∴$c=2$，…………………………………………………………………………… 2 分

∵$a^2+b^2=c^2$，∴$b=\sqrt{3}$，…………………………………………………………………………… 3 分

∴双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$．……………………………………………………………… 4 分

（2）（i）设$M(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$y_1=\sqrt{3}x_1$①，$y_2=-\sqrt{3}x_2$②，

将①+②可得$y_1+y_2=\sqrt{3}(x_1-x_2)$，将①−②可得$y_1-y_2=\sqrt{3}(x_1+x_2)$，……………………… 5 分

∴$\frac{y_1+y_2}{\sqrt{3}(x_1+x_2)}=\frac{\sqrt{3}(x_1-x_2)}{y_1-y_2}$，即$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{3(x_1-x_2)}{y_1-y_2}$，…………………………………………… 6 分

由题可知$|MP|=|MQ|$，∴$x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，

∴$\frac{y_0}{x_0}=\frac{3(x_1-x_2)}{y_1-y_2}$，即$k_{PQ}=\frac{3x_0}{y_0}$，…………………………………………………………… 7 分

∴直线PQ的方程为$y-y_0=\frac{3x_0}{y_0}(x-x_0)$，即$3x_0x-y_0y=3x_0^2-y_0^2$，

又∵点M在C上，∴$3x_0^2-y_0^2=3$，则$3x_0x-y_0y=3$，……………………………………………… 8 分

将方程联立$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\3x_0x-y_0y=3,\end{cases}$得$(y_0^2-3x_0^2)x^2+6x_0x-3-y_0^2=0$，

∴$-3x^2+6x_0x-3x_0^2=0$，由$\Delta=0$可知方程有且仅有一个解，

∴l与C有且仅有一个交点．………………………………………………………………………… 9 分

（ii）由（2）（i）联立$\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\3x_0x-y_0y=3,\end{cases}$可得$x_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0-y_0}$，同理可得$x_2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0+y_0}$，……… 10 分

∴$|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=4|x_1x_2|=4\times\frac{3}{3x_0^2-y_0^2}=4$，…………………………11 分

∴$\frac{1}{|OP|}+\frac{2}{|OQ|}=\frac{1}{|OP|}+\frac{|OP|}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|OP|}\times\frac{|OP|}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{1}{|OP|}=\frac{|OP|}{2}$即$|OP|=\sqrt{2}$时取等号．

又∵$|OP|\in(0,+\infty)$，

∴$\frac{1}{|OP|}+\frac{2}{|OQ|}$的取值范围为$[\sqrt{2},+\infty)$．…………………………………………………… 12 分