2021年普通高校招生统一考试
湖南四大名校名师团队猜题卷(A)

数学参考答案

1. C

2. D 【解析】$z=\frac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\frac{2+\mathrm{i}}{-1}=-2-\mathrm{i}$.

3. C 【解析】因为 $1+3+3+5+5+7=24$,故编号为26的佛塔在第7行,呈宝瓶状.

4. B 【解析】先排高一年级学生,有 A_2^2 种排法,①若高一年级学生中间有高三学生,有 A_4^2 种排法;②若高一学生中间无高三学生,有 $C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1$ 种排法.所以共有 $A_2^2\cdot(A_4^2+C_2^1C_2^1C_3^1)=48$ 种排法.

5. A 【解析】函数 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位,得到函数 $y=\sqrt{2}\sin x$ 的图象,$y=\sqrt{2}\sin x$ 为奇函数,故选A.

6. C 【解析】$(\sqrt[5]{5})^{10}=5^2=25$,$(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$. ∵ $25<32$. ∴ $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$. 又∵ $(\sqrt[3]{3})^6=3^3=9$,$(\sqrt{2})^6=2^3=8$,∴ $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$. ∴有 $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. 又因为镜片折射率越高,镜片越薄.故甲同学制作的镜片最厚,乙同学制作的镜片最薄.

7. B 【解析】此题为椭圆规画椭圆的原理.在两条互相垂直的直线 XX' 和 YY' 上建立平面直角坐标系,当点 P 在第一象限时,设 AB 与 X 轴的夹角为 θ,则 P 的坐标为 $(|PB|\cos\theta,|PA|\sin\theta)$,从而可知,点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{PB^2}+\frac{y^2}{PA^2}=1$ 上,点 P 的轨迹是四分之一个椭圆.当点 P 在其它几个象限或坐标轴上时,点 P 的坐标满足方程 $\frac{x^2}{PB^2}+\frac{y^2}{PA^2}=1$,所以点 P 的轨迹是一个椭圆,焦距长为 $2\sqrt{||PA|^2-|PB|^2|}$.

8. D 【解析】令 $y=0$,则有 $2f(0)+f(0)(f(x)+1)=2(x-1)$. 又 $f(0)=-1$,∴ $f(x)=-2x-1$. 从而集合 A 中,$\frac{1}{2}t(t-f(x))=6^{2021}$ 可化为 $\frac{1}{2}t(t+2x+1)=6^{2021}$.
即 $t(t+2x+1)=2\times6^{2020}=2^{2021}\times3^{2020}$. ∵ $t\in\mathbf{N}^*$,$x\in\mathbf{N}^*$,∴ t,$t+2x+1$ 必定为一奇一偶.
若 t 为偶数时,t 的取值可以为 2^{2021},$2^{2021}\times3$,$2^{2021}\times3^2$,…,$2^{2021}\times3^{2020}$,共有2021个 (t,x).
若 $t+2x+1$ 为偶数时,同理也有2021个 (t,x).
∴集合 A 中的元素个数共有 $2021\times2=4042$(个).

9. AD 【解析】由题中数据可知,无论是运用系统抽样还是分层抽样,都不需要先剔除个体,A正确,B错误.系统抽样确定起始号时需要用到简单随机抽样,C错误.分层抽样时,所有个体被抽到的机会均等,D正确.

10. BD 【解析】∵ $\begin{cases}b+c=6-4a+3a^2 & ①\\ c-b=4-4a+a^2 & ②\end{cases}$,①-②得 $2b=2a^2+2$,即 $b=a^2+1$ ∴ $b\geqslant1$.
又 $b-a=a^2+1-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,∴ $b>a$.
而 $c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant0$. ∴ $c\geqslant b$,从而 $c\geqslant b>a$. ∴选BD.

11. ACD 【解析】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,易证 $AC_1\perp B_1C$,$AC_1\perp B_1D_1$,又 $B_1C\cap B_1D_1=B$,
所以有 $AC_1\perp$ 面 B_1D_1C,当 F 为 A_1C_1 中点时,$CF\subset$ 面 B_1D_1C,∴ $AC_1\perp CF$,A正确;
对于B,∵ $B_1D_1\perp A_1C_1$,$B_1D_1\perp AA_1$,
∴ $B_1D_1\perp$ 面 AA_1C_1C,$CA_1\subset$ 面 AA_1C_1C,∴ $B_1D_1\perp CA_1$. 若 F 与 A_1 重合时,异面直线 CF 与 B_1D_1 所成角为 $\frac{\pi}{2}$,B错误;

对于C，当 $A_1F=\frac{1}{4}A_1C_1$ 时，过 F 作 $FH\perp A_1D_1$，垂足为 H，则 $FH/\!/AB, A_1H=\frac{1}{4}AA_1$.

易证 $BA\perp$ 面 AA_1D_1D，从而由 $BA\perp AA_1, BA\perp AH$ 可得二面角 $F-AB-A_1$ 的平面角为 $\angle A_1AH$.

$\therefore \tan\angle A_1AH=\frac{1}{4}$，C 正确.

对于D，点 F 与 C_1 重合时，三棱锥 $C-BDF$ 的外接球即正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，

其直径 $2R=\sqrt{3}$. $\therefore$ 其表面积 $S=4\pi R^2=3\pi$. D 正确.

12. AB 【解析】易证 $e^x\geqslant ex$，$\therefore f(x)=e^x-ex\geqslant 0$ 恒成立，所以 C 错误.

令 $h(x)=f(x)-ag(x)$. 若 $a=1$，则 $x\in(0,1)$ 时，$-(x^2-x)>0$，此时 $h(x)>0$ 恒成立.

显然 D 错误. 对于 A、B，$h(1)=0, h'(x)=e^x-e-a(2x-1)$.

$h''(x)=e^x-2a$，当 $a<0$ 时，$h''(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒为正，故 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

又因为 $h'(0)=1-e+a<0, h'(1)=-a>0$. $\therefore h'(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一零点 x_0，

$x\in(0,x_0), h'(x)<0; x\in(x_0,1), h'(x)>0$. $\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增.

$\therefore h(x_0)<h(1)=0$，而 $h(0)=1>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上存在唯一零点，A、B 正确.

13. $\sqrt{26}$ 【解析】$\boldsymbol{c}=(1,5)$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{26}$.

14. n 取 6,8,9,10,11 中任意一个值均可.

【解析】$(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}x)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=(\sqrt{2})^r(\sqrt[3]{3})^{n-r}C_n^r x^r, r\leqslant n, r\in\mathbf{N}$.

若系数为有理数，则 $\frac{r}{2}\in\mathbf{Z}$，且 $\frac{n-r}{3}\in\mathbf{Z}$. 当 $n=3$ 时，$r=0$；

$n=4$ 时 $r=4$；$n=5$ 时 $r=2$；$n=6$ 时 $r=0,6$；$n=7$ 时 r 无解；$n=8$ 时 $r=2,8$；$n=9$ 时 $r=0,6$；$n=10$ 时 $r=4,10$；$n=11$ 时 $r=2,8$，$n=12$ 时 $r=0,6,12$. 所以 n 可取 6,8,9,10,11 中的任意一个值.

15. 3 【解析】已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，由 $a_5=a_2\cdot q^3$ 得，$2\cdot q^3=\frac{1}{4}$，$q^3=\frac{1}{8}$，解得 $q=\frac{1}{2}$，又 $a_2=2$. $\therefore a_1=4$.

易得数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 也是等比数列，其首项为 $a_1a_2=8$，公比为 $\frac{1}{4}$.

$\therefore a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})\leqslant\frac{21}{2}$，从而有 $\left(\frac{1}{4}\right)^n\geqslant\frac{1}{64}$.

$\therefore n\leqslant 3$. 故 $n_{\max}=3$.

16. $2-\sqrt{2}$ 【解析】由题意得 $\angle AOF=45^\circ=\angle COF$，过 M、N 向 x 轴作垂线，垂足分别为 M_1, N_1.

设 $|OM|=m, |ON|=n$，则 $|MM_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}m, |NN_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}n$.

$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}mn=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}m+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}n$，所以有 $mn=m+n$.

又 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$，有 $mn\geqslant 4$.（当且仅当 $m=n$ 时等号成立）.

Rt$\triangle OMN$ 的内切圆半径 $r=\frac{|OM|+|ON|-|MN|}{2}=\frac{m+n-\sqrt{m^2+n^2}}{2}=\frac{mn-\sqrt{(mn)^2-2mn}}{2}$

令 $t=mn, t\geqslant 4$，则 $r=\frac{t-\sqrt{t^2-2t}}{2}=\frac{t}{t+\sqrt{t^2-2t}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{2}{t}}}$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore$ 当 $t=4$ 时，r 有最大值为 $2-\sqrt{2}$.

17.【解析】(1) 设等比数列的首项为 a_1，公比为 $q>0$，

由 $\begin{cases}a_1\cdot q^4=\frac{1}{2},\\ a_1\cdot q^5+a_1\cdot q^6=3,\end{cases}$ 得 $a_1=\frac{1}{32}, q=2$. …………………………………… 2 分

所以 $a_n=2^{n-6}$. …………………………………………………………………………………… 4 分

(2)$b_n=\log_a a_n=(n-6)\log_a 2$.

数列$\{b_n\}$是首项为$-5\log_a 2$,公差为 $\log_a 2$ 的等差数列. ………………………………………… 6 分

方法一:当 $0<a<1$ 时,$\log_a 2<0$,数列$\{b_n\}$是首项为正的递减等差数列.

由 $b_n\geqslant 0$,得 $n\leqslant 6$,$(S_n)_{\max}=S_5=S_6=-15\log_a 2$,$S_n$ 没有最小值. ………………………… 8 分

当 $a>1$ 时,$\log_a 2>0$,数列$\{b_n\}$是首项为负的递增等差数列.

由 $b_n\leqslant 0$,得 $n\leqslant 6$,所以$(S_n)_{\min}=S_5=S_6=-15\log_a 2$,$S_n$ 没有最大值. ………………… 10 分

方法二:利用等差数列求和公式得

$S_n=-5n\log_a 2+\dfrac{n(n-1)}{2}\times\log_a 2=\dfrac{n^2-11n}{2}\times\log_a 2$. ……………………………………… 6 分

当 $a>1$ 时,$\log_a 2>0$,此时$(S_n)_{\min}=S_5=S_6=-15\log_a 2$,$S_n$ 没有最大值. ……………………… 8 分

当 $0<a<1$ 时,$\log_a 2<0$,此时$(S_n)_{\max}=S_5=S_6=-15\log_a 2$,$S_n$ 没有最小值. ……………… 10 分

18.**【解析】**(1)连结 BD.

在$\triangle ABD$ 中,$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos A=4-2\sqrt{3}\cos A$,

在$\triangle BCD$ 中,$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\times CD\times\cos C=2-2\cos C$, ………………………………… 2 分

故有 $4-2\sqrt{3}\cos A=2-2\cos C$,

从而 $\cos C=\sqrt{3}\cos A-1$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,所以由(1)可得 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$,

$C\in(0,\pi)$,所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$,

而 $CD=CB$,故$\angle CDB=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………… 7 分

此时 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos A=(\sqrt{3})^2+1^2-2\times\sqrt{3}\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$.

从而 $AB=BD$,所以$\triangle ABD$ 为等腰三角形.

$\cos\angle ADB=\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$, ………………………………………………… 9 分

$\cos\angle ADC=\mathrm{coc}(\angle ADB+\angle BDC)=\cos\left(\angle ADB+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{33}}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{33}}{12}$.

所以 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\times CD\times\cos\angle ADC$

$=1^2+1^2-2\times 1\times 1\times\dfrac{3-\sqrt{33}}{12}=\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$.

从而 $AC=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}}$ 千米 ……………………………………………………………………… 12 分

19.**【解析】**(1)证明:因为平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$,且平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=DC$.

$BC\perp CD$,

所以 $BC\perp$ 平面 PDC.

又 $BC\subset$ 平面 PBC,从而平面 $PDC\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………… 3 分

已知$\triangle PDC$ 为等边三角形,E 为 PC 中点,

所以 $DE\perp PC$,故平面 $PDC\cap$ 平面 $PBC=PC$,

故 $DE\perp$ 平面 PBC.

由已知 $l\subset$ 平面 PBC,所以 $DE\perp l$. …………………………………………………………… 5 分

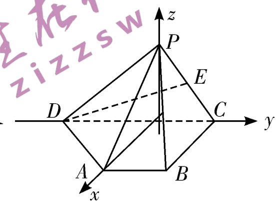
(2)方法一:设 DC 中点为 O,则 $PO\perp DC$,因为平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,

如图,以 O 为原点,OA 为 x 轴,OC 为 y 轴,OP 为 z 轴,建立空间坐标系,

由已知有 $A(\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$D(0,-1,0)$，$B(\sqrt{2},1,0)$，$C(0,1,0)$. ………………………………… 6 分

设平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

因为 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{PA}$，$\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(0,-1,-\sqrt{3})$，



所以 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-\sqrt{3}z_1=0\\ -y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}z_1\\ y_1=-\sqrt{3}z_1\end{cases}$，

令 $z_1=\sqrt{2}$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{6},\sqrt{2})$ ………………………………… 8 分

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\because \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-\sqrt{3})$，

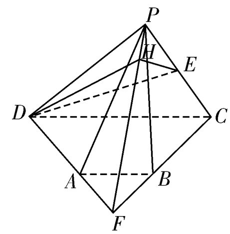
$\begin{cases}\sqrt{2}x_2+y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\ y_2=\sqrt{3}z_2\end{cases}$，令 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$，

因为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{6},\sqrt{2})$，$\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$，………………………………… 10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|-\sqrt{18}+\sqrt{2}|}{\sqrt{3+6+2}\cdot\sqrt{3+1}}=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

所以平面 PAD 和平面 PBC 所成二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$. ………………………………… 12 分

方法二：设 CB 与 DA 相交于点 F，PF 即平面 PAD 与平面 PBC 的交线.



过 E 设 $EH\perp PF$，垂足为 H.

连结 DH.

由(1)知 $DE\perp$ 平面 PBC，

所以 $PF\perp DE$，从而 $PF\perp$ 平面 DEH.

所以 $PH\perp DH$，

故 $\angle DHE$ 是平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的平面角. ………………… 8 分

由已知易得 $DE=\sqrt{3}$，且 $CF=2CB=2\sqrt{2}$，

由(1)知 $\triangle PCF$ 为直角三角形，$\angle C$ 为直角，

从而 $PF=\sqrt{PC^2+CF^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，

所以 $EH=EP\times\sin\angle CPF=\dfrac{1}{2}CP\times\dfrac{CF}{PF}=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，………………………………… 10 分

故 $DH=\sqrt{DE^2+EH^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{11}{3}}$，

所以 $\cos\angle DHE=\dfrac{EH}{DH}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\sqrt{\dfrac{11}{3}}}=\sqrt{\dfrac{22}{11}}$. ………………………………… 12 分

20.【解析】(1)记恰好经过 3 次检测能把这个家庭阳性样本全部检测出来为事件 A，

则 $P(A)=\dfrac{C_2^1C_2^1A_2^2}{A_4^4}=\dfrac{1}{3}$. ………………………………… 4 分

(2)当 $P=0.01$ 时，每个人核酸检测呈阴性的概率为 0.99.

若选择方式一，该社区对其中 850 户 4 口之家需进行 $X_1=3400$ 次核酸检测. ………………… 5 分

若选择方式二，记每个 4 口之家检测次数为 ξ_2，则 ξ_2 可能取值为 2,4,6，其分布列为

ξ_2	2	4	6
P	0.99^4	$C_2^1(1-0.99^2)\times0.99^2$	$(1-0.99^2)^2$

$E\xi_2=2\times0.99^4+4\times C_2^1(1-0.99^2)\times0.99^2+6\times(1-0.99^2)^2=6-4\times0.99^2=2.08.$

故该社区对其中 1000 户 4 口之家进行核酸检测总次数期望 $EX_2=850E\xi_2=1768$ 次. …………………… 8 分

若选择方式三进行核酸检测,记每个 4 口之家检测次数为 ξ_3,则 ξ_3 可能取值为 1,5. 其分布列为

ξ_3	1	5
P	0.99^4	$1-0.99^4$

故选择方式三每个 4 口之家检测次数的期望为

$E\xi_3=1\times0.99^4+5(1-0.99^4)=5-4\times0.99^4\approx1.16$

故该社区对其中 1000 户 4 口之家进行核酸检测总次数期望为 $EX_3=850\times1.16\approx986$ 次.

显然 $EX_3<EX_2<EX_1$ …………………… 11 分

由上可知,当每个人核酸检测呈阳性概率很小时,采取每个家庭检测样本混合在一起检测时,检测总次数期望相较其他方式少,对人数众多的群体采用方式三进行核算检测显著提高了检测效率,大大节约了检测成本. …………………… 12 分

21.【解析】(1) 由题意可得 $\begin{cases}m^2=2p\\ \sqrt{1+m^2}=1+\dfrac{p}{2}\end{cases}$,解得 $p=4$,

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=8y$. …………………… 3 分

(2) 由(1)知,圆 F 方程为:$x^2+(y-2)^2=1$,

由已知可设 $l:y=kx+2$,且 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+2\\ x^2=8y\end{cases}$ 得 $x^2-8kx-16=0$,

设 $Q(x_0,y_0)$ 是抛物线 C 上任一点,则 $|QF|=\sqrt{x_0^2+(y_0-2)^2}=\sqrt{8y_0+(y_0-2)^2}=\sqrt{(y_0+2)^2}>2$,

故抛物线与圆相离. …………………… 5 分

①证明:当直线 l 与 x 轴不平行时,有 $k\neq0$,

方法一:由抛物线定义知,$|AF|=y_1+2$,$|BF|=y_2+2$.

所以 $||AM|-|BN||=|(|AF|-1)-(|BF|-1)|$

$=||AF|-|BF||=|y_1-y_2|=|(kx_1+2)-(kx_2+2)|$

$=|k||x_1-x_2|=|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=|k|\cdot\sqrt{64k^2-4\times(-16)}=8|k|\sqrt{k^2+1}>0$,

所以 $|AM|\neq|BN|$ …………………… 7 分

方法二:因为 A、M、N、B 四点共线,M、N 中点为 $F(0,2)$,

若 $|AM|=|BN|$,则必有 AB 中点与 M、N 中点重合,即 $x_1+x_2=0$,

因为 $x_1+x_2=8k\neq0$,

所以 $|AM|\neq|BN|$. …………………… 7 分

②由(1)知抛物线方程为 $y=\dfrac{1}{8}x^2$.

所以 $y'=\dfrac{1}{4}x$.

所以过点 A 的切线 l_1:$y-\dfrac{1}{8}x_1^2=\dfrac{1}{4}x_1(x-x_1)$,即 $y=\dfrac{1}{4}x_1x-\dfrac{1}{8}x_1^2$.

同理可得,过点 B 的切线 l_2 为 $y=\dfrac{1}{4}x_2x-\dfrac{1}{8}x_2^2$.

由 l_1,l_2 方程联立,得 $x_2y-x_1y=-\dfrac{1}{8}x_1^2x_2+\dfrac{1}{8}x_2^2x_1$,

解之,得 $y_D=\dfrac{1}{8}x_1x_2=-2$, …………………… 9 分

又得$\frac{1}{4}(x_2-x_1)x-\frac{1}{8}(x_2^2-x_1^2)=0$,

所以 $x_D=\frac{x_1+x_2}{2}=4k$. …………………………………………………………………………………… 10 分

$D(4k,-2)$到 $l:y=kx+2$ 的距离 $d=\frac{|4k\times k-(-2)+2|}{\sqrt{k^2+1}}=4\sqrt{k^2+1}$,

$|AM|\cdot|BN|=(|AF|-2)(|BF|-2)$

$=[(y_1+2)-2][(y_2+2)-2]$

$=y_1y_2=\frac{x_1^2}{8}\times\frac{x_2^2}{8}=\frac{1}{64}(x_1x_2)^2=4$,

从而 $S_{\triangle QAM}\cdot S_{\triangle QBN}=\frac{1}{2}|AM|d\cdot\frac{1}{2}|BN|d$

$=\frac{1}{4}\times 4d^2=d^2=16(k^2+1)\geqslant 16$. …………………………………………………………………… 12 分

22.**【解析】**(1)函数 $y=f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-\ln(x+1)$,所以 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$,

易知 $f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增,且 $f'(0)=0$. ……………………………………………… 3 分

则在$(-1,0)$上 $f'(x)<0$,在$(0,+\infty)$上 $f'(x)>0$,

从而 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………………………… 5 分

(2)证明:$f(x)=ae^x-\ln(x+1)+\ln a$,所以 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x+1}$,且 $a\geqslant 1$.

设 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=ae^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$,

所以 $g(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增,即 $f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增, ………………… 7 分

由 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x+1}=0$ 即$\frac{1}{a}=(x+1)e^x$,设 $h(x)=(x+1)e^x$

$h'(x)=(x+2)e^x>0$,则 $h(x)$在$[-1,+\infty)$上单调递增且 $h(-1)=0$.

则当 $a\in[1,+\infty)$时,都恰有一个 $x_0>-1$,使得 $f'(x_0)=ae^{x_0}-\frac{1}{x_0+1}=0$,

且当 $x\in(-1,x_0)$时 $f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$时 $f'(x)>0$,

因此 $f(x)$总有唯一的极小值点 x_0. …………………………………………………………………… 9 分

所以 $ae^{x_0}=\frac{1}{x_0+1}$,从而 $\ln a=-\ln(x_0+1)-x_0$,

极小值 $f(x_0)=ae^{x_0}-\ln(x_0+1)+\ln a=-2\ln(x_0+1)+\frac{1}{x_0+1}-x_0$ ………………………… 10 分

由 $\ln a=-\ln(x_0+1)-x_0$,可得当 $a\in[1,+\infty)$时,$-\ln(x_0+1)-x_0\geqslant 0$ 即 $\ln(x_0+1)+x_0\leqslant 0$,

$\ln(x_0+1)+x_0$ 随 x_0 增大而增大,易得 $x_0\in(-1,0]$.

令 $t=x_0+1$,则 $t\in(0,1]$,设 $\varphi(t)=-2\ln t+\frac{1}{t}-t+1$,$\varphi(1)=1$

$\varphi'(t)=-\frac{(t+1)^2}{t^2}<0$,所以 $\varphi(t)$在$(0,1]$上单调递减,且 $\varphi(1)=1$,从而 $\varphi(t)\geqslant 1$.

即 $f(x_0)\geqslant 1$. …………………………………………………………………………………………… 12 分