

邕衡金卷广西 2023 届高三一轮复习诊断性联考文科数学答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	C	C	B	B	D	A	B	D	A	A

1. D 【解析】 $\bar{z} = 1 - \sqrt{2}i, z\bar{z} = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 1 + 2 = 3$. $\frac{z}{z\bar{z} + 3} = \frac{1 + \sqrt{2}i}{6} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6}i$ 故选 : D

2. C

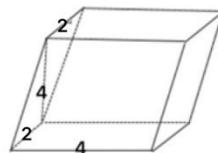
3. C 【解析】 因为 $A = \{x | y = \sqrt{25 - x^2}\}$, $\therefore 25 - x^2 \geq 0$, 所以 $\therefore A = \{x | -5 \leq x \leq 5\}$

$$\therefore B = \{x | x^2 + 4x - 12 < 0\} = \{x | -6 < x < 2\}, \text{ 则 } \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq -6 \text{ 或 } x \geq 2\}$$

故 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 故选: C.

4. C 【解析】 由几何体的三视图可知几何体的直观图如下:

所以 $V = Sh = 2 \times 4 \times 4 = 32$. 故选: C



5. B 【解析】 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 所以

$$\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \omega = \frac{1}{2} + 3k, k \in \mathbb{Z}, \text{ 当 } k = 0 \text{ 时, } \omega_{\min} = \frac{1}{2}.$$

6. B 【解析】 记 2 个“冰墩墩”为 a, b , 记 3 个“雪容融”为 1, 2, 3, 选取两个吉祥物作为冬奥会纪念品的基本事件有:

$(a, b), (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (1, 2), (1, 3),$

$(2, 3)$, 共 10 个. 其中选取到 1 个“冰墩墩”和 1 个“雪容融”有 6 个基本事件, 则概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

7. D 【解析】 因为 $f(-x) = \frac{x^2(-\sin 2x)}{2^{-x} - 2^x} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 A, C 错误; $f(1) = \frac{1^2 \sin 2}{2^1 - 2^{-1}} > 0$,

选项 B 符合函数 $f(x)$, B 不符合. 故选: D.

8. A 【解析】 \therefore 函数 $f(x) = \frac{e^x}{ax+2}, \therefore f'(x) = \frac{e^x(ax+2) - ae^x}{(ax+2)^2} = \frac{e^x(ax+2-a)}{(ax+2)^2}$

$$\therefore f'(-1) = \frac{e^{-1}(-a+2-a)}{(-a+2)^2} = 0, \therefore a = 1$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} \quad x \in (-2, +\infty)$$

\therefore 当 $-2 < x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递减,

当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值即最小值, $\therefore f(x)_{\min} = f(-1)$,

\therefore 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ 在 $(-2, b)$ 上有最小值, $\therefore b > -1$, 即 $b \in (-1, +\infty)$; 故选: A.

9. B 【解析】设圆锥高为 h , 底面圆半径 $r = \frac{\sqrt{3}h}{3}$, 圆锥的体积为 $V_1 = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{3}h^2 \times h = \frac{h^3}{9}$,

圆柱的半径 $r = \frac{\sqrt{3}h}{9}$, 高为 $\frac{2h}{3}$, 体积为 $V_2 = \pi \times \frac{1}{27}h^2 \times \frac{2}{3}h = \frac{2h^3}{81}$, 所以 $V_1 : V_2 = 2 : 9$.

10. D 【解析】依题意可得 $\omega > 0$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\omega x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \omega\pi - \frac{\pi}{6}\right)$,

要使函数在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、三个零点, 作出 $y = 2\sin t$ 的图象, 容易得到

则 $\frac{5\pi}{2} < \omega\pi - \frac{\pi}{6} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{8}{3} < \omega \leq \frac{19}{6}$, 即 $\omega \in \left(\frac{8}{3}, \frac{19}{6}\right]$. 故选: D.

11. A 【解析】由题意得, 点 M 为 PQ 中点.

$\therefore k_{PQ} = -k_{BF_1} = k_{BF_2} = -\frac{b}{c}$, $\therefore k_{OM} \cdot k_{PQ} = \frac{b^2}{a^2}$, $M(-4, 1)$

$\therefore k_{PQ} = -\frac{b}{c} = -\frac{4b^2}{a^2}$, $\therefore 4bc = a^2$, $\therefore 16b^2c^2 = a^4$, $\therefore 16e^4 - 16e^2 - 1 = 0$, $\therefore e^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{4}$

12. A 【解析】方法一: 构造法

设 $f(x) = \ln(1+x) - x (x > -1)$, 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

所以 $f\left(\frac{3}{7}\right) < f(0) = 0$, 所以 $\ln \frac{10}{7} - \frac{3}{7} < 0$, 故 $\frac{3}{7} > \ln \frac{10}{7} = -\ln 0.7$, 即 $c > a$,

所以 $f\left(-\frac{3}{10}\right) < f(0) = 0$, 所以 $\ln \frac{7}{10} + \frac{3}{10} < 0$, 故 $\frac{7}{10} < e^{-\frac{3}{10}}$, 所以 $\frac{3}{10}e^{\frac{3}{10}} < \frac{3}{7}$, 故 $b < c$,

设 $g(x) = xe^x + \ln(1-x) (0 < x < 1)$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}$,

令 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$, $h'(x) = e^x(x^2+2x-1)$,

当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递减,

当 $\sqrt{2}-1 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递增,

又 $h(0) = 0$, 所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $h(x) < 0$,

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ 单调递增,

所以 $g(0.3) > g(0) = 0$, 即 $0.3e^{0.3} > -\ln 0.7$, 所以 $b > a$ 故选: A.

方法二: 比较法

解: $a = -\ln(1-0.3), b = 0.3e^{0.3}, c = \frac{0.3}{1-0.3}$

① $\ln b - \ln c = 0.3 + \ln(1-0.3)$, 令 $f(x) = x + \ln(1-x), x \in (0, 0.3]$,

则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 0.3]$ 上单调递减,

可得 $f(0.3) < f(0) = 0$, 即 $\ln b - \ln c < 0$, 所以 $b < c$;

② $b - a = 0.3e^{0.3} + \ln(1-0.3)$, 令 $g(x) = xe^x + \ln(1-x), x \in (0, 0.3]$,

则 $g'(x) = xe^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x}$,

令 $k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1$, 所以 $k'(x) = (1-x^2 - 2x)e^x > 0$,

所以 $k(x)$ 在 $(0, 0.3]$ 上单调递增, 可得 $k(x) > k(0) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 0.3]$ 上单调递增, 可得 $g(0.3) > g(0) = 0$, 即 $b - a > 0$, 所以 $b > a$.

故 $a < b < c$.

13. 1 【解析】由投影的定义知, \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为 $|\vec{a}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

14. -3

15. 2 【解析】由题意得, 四边形 PF_1QF_2 是矩形, 由焦点三角形面积公式得

$$\Delta F_1PF_2 = b^2 \tan \frac{\theta}{2} = 1 \times \tan 45^\circ = 1, \therefore S_{\text{矩形}PF_1QF_2} = 2S_{\Delta F_1PF_2} = 2.$$

16. $\frac{64\sqrt{3}}{9}$ 【解析】在 ΔABC 中, 设 $AB = c, BC = a, AC = b$,

由 $AD = 3DC$, 则 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, 则 $|\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{16}(c^2 + 9a^2 + 3ac)$,

$16^2 = c^2 + 9a^2 + 3ac \geq 9ac$, 即 $ac \leq \frac{256}{9}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \leq \frac{64\sqrt{3}}{9}, \text{ 当且仅当 } 3a = c \text{ 时取等号.}$$

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$.

17. 解: (1) 根据表格可得男生观看人数为 $5+6+15+12+12+14+14+10+24+8=120 \dots$ (2分)

女生观看人数为 $4+6+7+17+11+13+13+8+8+13=100 \dots$ (4分)

所以可得列联表:

	观看	没观看	合计
男生	120	80	200
女生	100	100	200
合计	220	180	400

..... (6分)

(表格数据对了, 没有式子也可以得6分)

(2) 由题可得 $K^2 = \frac{400 \times (120 \times 100 - 100 \times 80)^2}{220 \times 180 \times 200 \times 200} = \frac{400}{99} \approx 4.040 > 3.841$, (列出 K^2 的表达式给 2

分, 计算出 $\frac{400}{99}$ 给 1 分, 计算出 4.040 给 2 分, 与 3.841 比较给 1 分)

所以有 95% 的把握认为观看该影片与性别有关. (不回答或回答不标准扣 1 分) ... (12分)

18. 解: (1) 当 $n=1$, $S_1 = 2a_1 - \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, (1分)

因为 $S_n = 2a_n - \frac{1}{4}$. ①,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - \frac{1}{4}$. ②, (2分)

①-②得, $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, (3分)

即 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$, 所以 $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为首项, 2 为公比的等比数列. (6分)

(2) 由 (1) 可得 $a_n = 2^{n-3}$, $b_n = \log_2 2^{n-3} = n-3$ (8分)

所以 $T_n = -2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n = \frac{1}{2}\left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}$, (10分)

所以, 当 $n=2$ 或 $n=3$ 时, $(T_n)_{\min} = -3$ (12分)

19. (1) 延长 $DC \cap AB = E$, 连接 ME 交 PB 于 F , 连接 FC ,
如图, 四边形 $MFCD$ 为截面 α (3分)
(延长 CD 给 1 分, 连接 ME 给 1 分, 截面 1 分.)

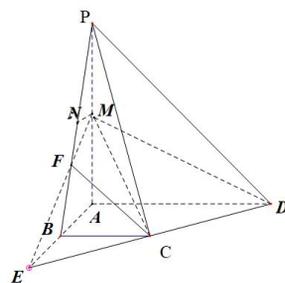
$\triangle ADE$ 中, $BC \parallel AD$, 由 $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$, 则 C 为 DE 中点, B 为 AE 中点..... (4分)

过 M 作 $MN \parallel AB$ 交 PB 于 N , 则 $MN = \frac{1}{2}AB = 1$, $MN \parallel AB$.

(5分)

$\therefore \triangle MNF \sim \triangle EBF \therefore \frac{FN}{BF} = \frac{MN}{BE} = \frac{1}{2}$

$\therefore BF = 2NF$, 即 $BF = \frac{1}{3}BP$ (6分)



(2) $V_{ABCDMF} = V_{E-MAD} - V_{E-FBC}$ (7分)

$V_{E-MAD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ADM} \cdot AE = \frac{16}{3}$ (9分)

$V_{E-FBC} = V_{F-BEC} = \frac{1}{3}S_{\triangle BFC} \cdot \frac{1}{3}PA = \frac{8}{9}$ (11分)

$V_{ABCDMF} = V_{E-MAD} - V_{E-FBC} = \frac{40}{9}$ (12分)

20. 解: (1) 抛物线的准线为 $x = -\frac{p}{2}$, 当 MD 与 x 轴垂直时, 点 M 的横坐标为 p ,

此时 $|MF| = p + \frac{p}{2} = 3$ (2分)

所以 $p = 2$ (3分)

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ (4分)

(2) 设 $P\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), Q\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), R\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), S\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$,

显然直线 PQ 的斜率不为 0, (5分)

设直线 $PQ: x = my - 1$, 与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立可得 $y^2 - 4my + 4 = 0$, 且 $\Delta > 0$

则 $y_1 \cdot y_2 = 4$ (6分)

由 P, B, R 三点共线, (7分)

$$\text{故 } k_{BR} = k_{PR}, \therefore \frac{y_3+1}{\frac{y_3^2}{4}-1} = \frac{y_1-y_3}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}} \text{ 即 } \frac{y_3+1}{y_3^2-4} = \frac{1}{y_1+y_3}, \text{ 即 } y_3 = \frac{-4-y_1}{y_1+1} \dots\dots\dots (9分)$$

同理: 由 Q, B, S 三点共线,

$$\text{故 } k_{BS} = k_{QS}, \therefore \frac{y_4+1}{\frac{y_4^2}{4}-1} = \frac{y_2-y_4}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}} \text{ 即 } \frac{y_4+1}{y_4^2-4} = \frac{1}{y_2+y_4}, \text{ 即 } y_4 = \frac{-4-y_2}{y_2+1} \dots\dots\dots (10分)$$

$$\text{所以 } k_{QR} + k_{PS} = \frac{y_2-y_3}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}} + \frac{y_1-y_4}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_2+y_3} + \frac{4}{y_1+y_4} = \frac{4}{y_2+\frac{-4-y_1}{y_1+1}} + \frac{4}{y_1+\frac{-4-y_2}{y_2+1}} = 4, \text{ 所以直线}$$

QR 与直线 PS 的斜率之和为定值-4. (12分)

21. 解 (1) 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = x(\ln x + 1)$. $f'(x) = \ln x + 2$, (1分)

$$\text{则 } f'(1) = 2, \dots\dots\dots (2分)$$

$$\text{即切线斜率为 } 2, \text{ 又 } f(1) = 1, \dots\dots\dots (3分)$$

$$\text{则切线 } l \text{ 的方程为 } y-1=2 \times (x-1), \text{ 即切线方程为 } 2x-y-1=0. \dots\dots\dots (4分)$$

(2) $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = x^2$ 的两个不等实根, $x_2 > 2x_1$, 且 $x_1 > 0, x_2 > 0$,

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 \ln x_1 - ax_1^2 + x_1 = 0 \\ x_2 \ln x_2 - ax_2^2 + x_2 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \ln x_1 + 1 = ax_1 \\ \ln x_2 + 1 = ax_2 \end{cases}, \dots\dots\dots (5分)$$

$$\therefore a = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + 2}{x_1 + x_2} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}, \dots\dots\dots (6分)$$

$$\text{即 } \ln x_1 x_2 + 2 = \frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1}, \dots\dots\dots (7分)$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1}, \text{ 则 } t > 2,$$

$$\text{则 } \ln x_1 x_2 + 2 = \frac{(t+1) \ln t}{t-1}, \dots\dots\dots (8分)$$

$$\text{令 } g(t) = \frac{(t+1) \ln t}{t-1}, \text{ 则 } g'(t) = \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(t-1)^2} \dots\dots\dots (9分)$$

$$\text{令 } h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t, \text{ 则 } h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2} > 0, \text{ 则 } h(t) \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore h(t) > h(2) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 > 0, \text{ 即 } g'(t) > 0, \text{ 则 } g(t) \text{ 单调递增, } \dots\dots\dots (10分)$$

$\therefore g(t) > g(2) = 3 \ln 2, \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$

$\therefore \ln x_1 x_2 + 2 > 3 \ln 2, \text{ 即 } \ln x_1 x_2 > 3 \ln 2 - 2 = \ln \frac{8}{e^2}, \text{ 即 } x_1 x_2 > \frac{8}{e^2} \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

22. 解: (I) 由 $\begin{cases} x = 2 \cos \varphi \\ y = \sqrt{3} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 是参数) 消去参数 φ 得: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入 上式 $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

所以曲线 C 的极坐标方程为 $3\rho^2 \cos \theta + 4\rho^2 \sin \theta = 12$ (或 $\rho^2 = \frac{12}{3 + \sin^2 \theta}$) $\dots\dots (5 \text{ 分})$

(II) \because 点 $A(\rho_1, \theta), B(\rho_2, \theta + \frac{\pi}{3}), C(\rho_3, \theta + \frac{2\pi}{3})$ 在在曲线 C 上,

$\therefore \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{1}{|OC|^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

$= \frac{1}{12} [3 + \sin^2 \theta + 3 + \sin^2(\theta + \frac{\pi}{3}) + 3 + \sin^2(\theta + \frac{2\pi}{3})]$

$= \frac{1}{12} [3 + \sin^2 \theta + 3 + (\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta)^2 + 3 + (-\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta)^2] \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

$= \frac{1}{12} [9 + \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{4} \cos^2 \theta]$

(8 分)

$= \frac{1}{12} (9 + \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{3}{2} \cos^2 \theta) \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

$= \frac{1}{12} \times (9 + \frac{3}{2}) = \frac{7}{8} \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

23. 解: (1) 解法一: 由柯西不等式得:

$(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{5}{2}} + b^{\frac{5}{2}}) = [(a^{\frac{1}{4}})^2 + (b^{\frac{1}{4}})^2] \cdot [(a^{\frac{5}{4}})^2 + (b^{\frac{5}{4}})^2] \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$[(a^{\frac{1}{4}})^2 + (b^{\frac{1}{4}})^2] \cdot [(a^{\frac{5}{4}})^2 + (b^{\frac{5}{4}})^2] \geq (a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})^2 = 4 \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

当 $a = b$ 时, 等号成立. 所以原式得证. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

解法二:

$(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{5}{2}} + b^{\frac{5}{2}}) = a^3 + b^3 + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{5}{2}} + a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$= (a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})^2 + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{5}{2}} + a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\geq (a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})^2 + 2\sqrt{a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{6}{2}} - 2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots (3 \text{分})$$

当 $a=b$ 时, 等号成立. (4分)

$$\text{即 } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a^{\frac{5}{2}} + b^{\frac{5}{2}}) \geq (a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})^2 = 4 \dots\dots\dots (5 \text{分})$$

(2) 解法一: 由 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = 2$ 及 $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ (6分)

$$2 = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \cdot (a + b - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2 - 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}] \dots\dots\dots (7 \text{分})$$

$$\geq (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \cdot [(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2 - \frac{3(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2}{4}]$$

$$2 \geq \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^3}{4} \dots\dots\dots (9 \text{分})$$

当 $a=b$ 时, 等号成立.

所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$ (10分)

解法二: 因为 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = 2$

$$\text{所以: } (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^3 - 8 = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^3 - 4(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}) \dots\dots\dots (6 \text{分})$$

$$= a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b + b^{\frac{3}{2}} - 4a^{\frac{3}{2}} - 4b^{\frac{3}{2}}$$

$$= 3a(b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}) + 3b(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = -3(a+b)(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = -3(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2 \dots\dots\dots (7 \text{分})$$

又 $a > 0, b > 0$, 所以:

$$-3(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2 \leq 0 \dots\dots\dots (8 \text{分})$$

$$(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^3 \leq 8 \quad \text{当 } a=b \text{ 时, 等号成立} \dots\dots\dots (9 \text{分})$$

所以, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$ (10分)