2020级高三第二次模拟考试（数学）学科试卷

一、单项选择题（本题共8小题，每题5分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．）

1. 设集合 $P=\{y\mid y=\lg x\}$，集合 $Q=\{x\mid y=\sqrt{2+x}\}$，则 $P\cap(\complement_R Q)=$

A. $[-2,0]$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

2. i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$，复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，则 $\bar{z}$ 的虚部为（　　）

A. -1　　B. -2　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. $-\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,m)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，则 $\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|=$（　　）

A. 54　　B. 48　　C. $3\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{3}$

4. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于我国南北朝时期的数学著作《孙子算经》．1852年，英国传教士伟烈亚力将该解法传至欧洲，1874年，英国数学家马西森指出此法符合1801年由高斯得到的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”．此定理讲的是关于整除的问题，现将1到2023这2023个数中，能被7除余1且被9除余1的数按从小到大的顺序排成一列，构成数列 $\{a_n\}$，则该数列的和为（　　）

A. 30014　　B. 30016　　C. 33297　　D. 33299

5. 一个圆锥的侧面展开图是半径为1的半圆，则此圆锥的内切球的表面积为（　　）

A. π　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

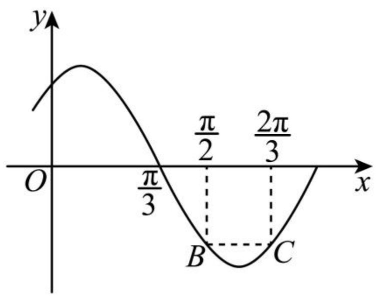
6. 已知 $a=\cos 1$，$b=\mathrm{e}^{\sin 1-1}$，$c=\dfrac{3}{4}$，则下列不等关系正确的是（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

7. 直线 l 的方程为 $(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-3\lambda=0(\lambda\in\mathbf{R})$，当原点 O 到直线 l 的距离最大时，λ 的值为（　　）

A. -1　　B. -5　　C. 1　　D. 5

8. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图，$BC\,/\!/\,x$ 轴，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，不等式 $f(x)\geq m-\sin 2x$ 恒成立，则 m 的取值范围是（　　）



A. $\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$　　D. $\left(-\infty,1\right]$

二、多项选择题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．）

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$，当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=x^2-3x$，则下列结论正确的是（　　）

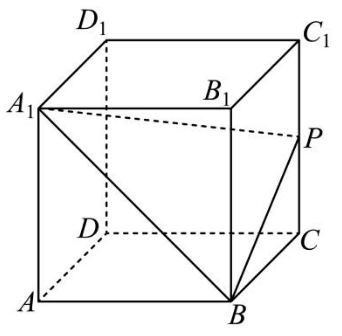
A. $f(x+6)=f(x)$　　B. $x\in[-6,-3]$ 时，$f(x)=x^2-3x-6$

C. $f(2021)+f(2023)=f(2022)$　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=2$

10. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^{2n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，前 n 项的积为 T_n，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_3=2$　　B. $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$　　C. $S_n=2^n-1$　　D. $T_{2n}=2^{n(2n-1)}$

11. 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60°$，$AB=AD=AA_1=2$，P 为 CC_1 中点，点 Q 在四边形 CDD_1C_1 内（包括边界）运动，下列结论正确的是（　　）



A. 若 $\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1}$，且 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{2}$，则四面体 A_1BPQ 的体积为定值

B. 若 AQ // 平面 A_1BP，则 AQ 的最小值为 $\sqrt{5}$

C. 若 $\triangle A_1BQ$ 的外心为 O，则 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1O}$ 为定值 2

D. 若 $A_1Q=\sqrt{7}$，则点 Q 的轨迹长度为 $\dfrac{\pi}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=a^x\ln a$，$g(x)=a\ln(x-1)$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$．若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，则下列结论正确的是（　　）

A. 当 $0<a<1$ 时，$h(x)$ 有且只有一个零点

B. 当 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，$h(x)$ 有两个零点

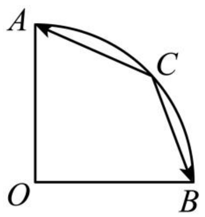
C. 当 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且只有两条公切线

D. 若 $h(x)$ 为单调函数，则 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leq a<1$

三、填空题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分．）

13. 若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=$____________.

14. 如图，单位向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，点 C 在以 O 为圆心，1 为半径的弧 AB 上运动，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最小值为______.

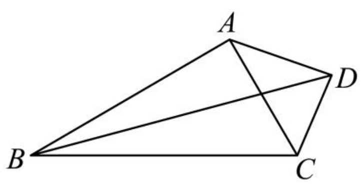


15. 已知函数 $f(x)=x^3+2^x-2^{-x}$，若实数 a、b 满足 $f(2a^2)+f(b^2-1)=0$，则 $a\sqrt{1+2b^2}$ 的最大值为______.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知动圆 M 的方程为 $(x+a+1)^2+(y-2a+1)^2=1(a\in\mathrm{R})$，则圆心 M 的轨迹方程为____________．若对于圆 M 上的任意点 P，在圆 O：$x^2+y^2=4$ 上均存在点 Q，使得 $\angle OPQ=30^\circ$，则满足条件的圆心 M 的轨迹长度为______.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

17. 如图，四边形 $ABCD$ 中 $\angle BAC=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，$AD\perp CD$，设 $\angle ACD=\theta$.



（1）若 ΔABC 面积是 ΔACD 面积的 4 倍，求 $\sin 2\theta$；

（2）若 $\angle ADB=\dfrac{\pi}{6}$，求 $\tan\theta$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1=4$， $\dfrac{a_n}{S_n}=\dfrac{n+1}{2n}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

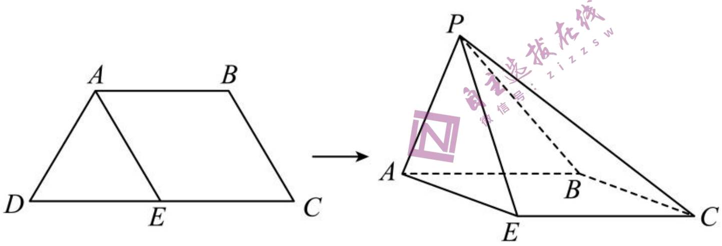
（2）记 $c_n=\dfrac{a_n}{2^n}-1$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 $\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}$ 的值.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+(1-a)x+(a-2)\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

20. 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB\,//\,CD$， $AD=AB=BC=1$， $CD=2$， E 为 CD 中点，以 AE 为折痕把V ADE 折起，使点 D 到达点 P 的位置（ $P\notin$ 平面 $ABCE$ ）.



（1）证明： $AE\perp PB$；

（2）若直线 PB 与平面 $ABCE$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$，求平面 APE 与平面 CPE 夹角的余弦值.

21. 已知圆 $M: x^2+(y-4)^2=4$， P 是直线 $l: x-2y=0$ 上的动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA，切点为A .

(1)当切线 PA 的长度为 $2\sqrt{3}$ 时，求点 P 的坐标.

(2)若 $\triangle PAM$ 的外接圆为圆 N，试问：当点 P 运动时，圆 N 是否过定点？若过定点，求出所有的定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\cdot\cos x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）已知 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上存在唯一的极小值点.

（ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（ⅱ）记 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的极小值为 $g(a)$，讨论函数 $g(a)$ 的单调性.