姓名________ 座位号________________________

（在此卷上答题无效）

数　学（理科）

本试卷共 4 页，全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

A 1. 已知集合 $A=\{x|\ln x<1\}$，$B=\{x|\sqrt{x+1}<\sqrt{3}\}$，则 $A\cap(\complement_{R}B)=$

A. $[2,e)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,e]$　　D. $(0,e)$

B 2. 复数 z 满足 $(2-i)z=3+4i$（i 为虚数单位），则复数 z 的模等于

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{5}$

C 3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_7=28$，$a_2+a_4=7$，则 $a_6=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

D 4. 若 x,y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x+y\geqslant 2\\ y\leqslant x\end{cases}$，则 $z=4x+y$ 的最大值为

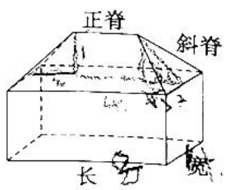
A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 15

A 5. 在 $\triangle ABC$ 中，"$\cos A>\cos B$"是"$\sin A<\sin B$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

B 6. 成语"运筹帷幄之中，决胜千里之外"，意思是在小小的军帐之内作出正确的部署，决定了千里之外战场上的胜利，说的是运筹的重要性。"帷幄"是古代打仗必备的帐篷，又称"幄帐"。右图是一种幄帐示意图，帐顶采用"五脊四坡式"，四条斜脊的长度相等，一条正脊平行于底面。若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$，底面矩形的长与宽之比为 $2:1$，则正脊与斜脊长度的比值为

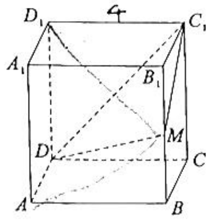


A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

7. 已知 $\alpha\in\mathbf{R}$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，则 $\tan2\alpha=$

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\pm\dfrac{3}{4}$　　D. $\pm\dfrac{4}{3}$

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，BB_1 的中点为 M，过 C_1，D，M 的平面把正方体分成两部分，则较小部分的体积为



A. $\dfrac{52}{3}$　　B. 18　　C. $\dfrac{56}{3}$　　D. $\dfrac{58}{3}$

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1+\ln x, x\geqslant1\\ \dfrac{1}{2}(x+1), x<1\end{cases}$，若 $m\neq n$，且 $f(m)+f(n)=2$，则 $m+n$ 的最小值等于

A. $4-2\ln3$　　B. $4-3\ln2$　　C. $2-3\ln2$　　D. $3-2\ln2$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，D 是 BC 上一点，且 $BD=3DC$，$AD=3$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是

A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $5\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$

11. 已知 $f(x)=e^x-ax^2$（a 为常数），则下列结论

(1) 当 $a=\dfrac{e}{2}$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点

(2) 若 $f(x)$ 有 3 个零点，则实数 a 的最小值是 $\dfrac{e^2}{4}$

(3) $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的零点 x_0 满足 $-1<x_0<-\dfrac{1}{2}$

正确的个数有

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+3x$，则 $\sum\limits_{k=1}^{4041}f\left(\dfrac{k}{2021}\right)=$

A. 2020　　B. 2021　　C. 4041　　D. 4042

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $5^a=4^b=10$，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=$__________.

14. 函数 $f(x)=\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+\dfrac{1}{2}$，$x\in[0,\pi]$，则 $f(x)$ 的单调递减区间是__________.

15. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y$ 的最大值为__________.

16. 不等式 $\dfrac{e^x}{x}+ax-a\ln x\geqslant0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是__________.

三. 解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

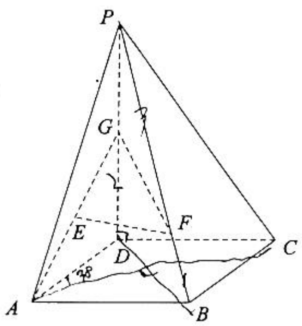
在锐角△ABC 中内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $\cos 2B-\sin(B-\frac{\pi}{2})=0$.

(1)求角 B;

(2)若 $b=\sqrt{7}$,$c=3$,求 $\sin A+\sin C$ 的值.

18. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$底面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,$PD=2$,G 为 PD 的中点,E 为 AG 的中点,点 F 在线段 PB 上,且 $PF=3FB$.



(1)求证:EF//平面 $ABCD$;

(2)求 GF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

19. (12 分)

已知函数 $f(x)=xe^x$.

(1)求 $f(x)$的单调区间;

(2)若 $g(x)=xe^x-x-\ln x-1$,证明:$g(x)\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.

20. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$为等差数列,S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $a_2=3$,$S_5=25$,数列$\{b_n\}$满足 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(2n-3)\times 2^n+3$.

(1)求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式;

(2)令 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$,证明:$c_1+c_2+\cdots+c_n<6$.

21.（12 分）

在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=CD=2$，$BC=AD=2\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{10}$，$\angle ABC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，点 M 在 AC 上.

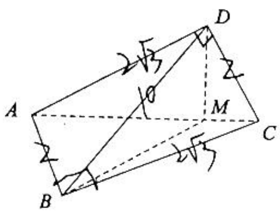


图1

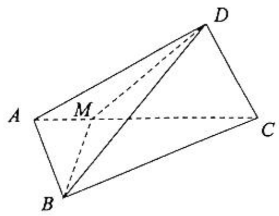


图2

（1）若 $AM=3CM$（如图 1），证明：$AB\perp DM$；

（2）若二面角 $A-DM-B$ 是直二面角（如图 2），求 $\frac{AM}{CM}$ 的值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的极值点；

（2）若函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\frac{1}{x}$ 的图象有 3 个不同的交点，试求 a 的取值范围.

皖江名校联盟2022届高三第四次联考
理科数学

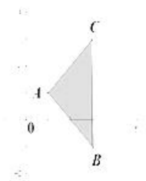
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	D	C	B	A	C	D	B	B	C

1.【解析】$A=(0,e),B=[-1,2),\complement_R B=\{x\mid x<-1,或x\geq 2\}$，$A\cap(\complement_R B)=[2,e)$.

2.【解析】$z=\dfrac{3+4i}{2-i}=\dfrac{2+11i}{5}$，所以$|z|=\sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{121}{25}}=\sqrt{5}$. 或者根据复数模的性质.

$|z|=|\dfrac{3+4i}{2-i}|=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

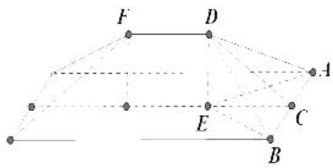
3.【解析】$S_7=7a_4=28\Rightarrow a_4=4$, 故$a_2=3$, 得$a_6=2a_4-a_2=5$.



4.【解析】如图，画出可行域，$z=4x+y$表示斜率为-4的一组平行线，当过点$C(3,3)$时，目标函数取得最大值$z_{\max}=4\times3+3=15$.

5.【解析】在$\triangle ABC$中$\cos A>\cos B\Leftrightarrow A<B\Leftrightarrow a<b\Leftrightarrow\sin A<\sin B$.

6.【解析】如图，不妨设$DE=1,AC=BC=CE=2$，



可得斜脊$AD=\sqrt{1+4+4}=3$, 因为矩形宽$AB=4$，

所以长为8，这样正脊$DF=8-2\times2=4$, 所以正脊与斜脊长度的比值为$4:3$即$\dfrac{4}{3}$.

7.【解析】因为$2\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{5}\sin(\alpha+\phi)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，其中$\tan\phi=\dfrac{1}{2}$，

得$\sin(\alpha+\phi)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\alpha+\phi=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$或者$2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，$k\in Z$，

则$\tan\alpha=\tan(\dfrac{\pi}{4}-\phi)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+1\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$或者$\tan\alpha=\tan(\dfrac{3\pi}{4}-\phi)=\dfrac{-1-\dfrac{1}{2}}{1-1\times\dfrac{1}{2}}=-3$，

所以$\tan2\alpha=\dfrac{2\times\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$或者$\tan2\alpha=\dfrac{2\times(-3)}{1-(-3)\times(-3)}=\dfrac{3}{4}$.

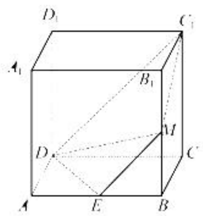
方法2：$2\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，两边平方得$\dfrac{4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{10}{4}$，

因此$\dfrac{4\tan^2\alpha+4\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{5}{2}$，可得$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$或者$\tan\alpha=-3$，后同解法1.

8.【解析】如图，截面是等腰梯形 C_1MED，E 是 AB 的中点，

较小部分是三棱台 $BEM-CDC_1$，上底 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

下底 $S_2=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，所以 $V=\frac{1}{3}(2+8+\sqrt{2\times8})\times4=\frac{56}{3}$.



方法2：较小部分可看成四棱锥 $M-BCDE$ 和三棱锥 $M-CC_1D$ 的组合，

$V=\frac{1}{3}\times(\frac{2+4}{2}\times4)\times2+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times4\times4)\times4=\frac{56}{3}$.

9.【解析】易见 $f(x)$ 在 R 上单调递增，且 $f(1)=1$，所以 $f(m)+f(n)=2$ 时，可设

$m<1<n$，$f(m)+f(n)=\frac{1}{2}(m+1)+1+\ln n=2$，得 $m=1-2\ln n(n>1)$

于是 $m+n=1-2\ln n+n$，令 $g(x)=x+1-2\ln x(x>1)$，$g'(x)=1-\frac{2}{x}$

所以 $g(x)$ 的极小值也是最小值，$g(2)=3-2\ln2$，故 $m+n$ 的最小值是 $3-2\ln2$。

10.【解析】设 $CD=x,BD=3x,\angle ADB=\theta$，由余弦定理可得

$b^2=9+x^2+6x\cos\theta,c^2=9+9x^2-18x\cos\theta$，消去 $\cos\theta$ 得 $3b^2+c^2=36+12x^2$，

又 $b^2+c^2-bc=16x^2$，联立消去 x 得 $144=9b^2+c^2+3bc\ge6bc+3bc=9bc$

所以 $bc\le16$，因此 $S=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}\le\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

方法2：$\overline{AD}=\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{AC}$，所以 $\overline{AD}^2=\frac{1}{16}\overline{AB}^2+\frac{9}{16}\overline{AC}^2+\frac{3}{8}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

因此 $9=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{16}bc\ge2\times\frac{3}{16}bc+\frac{3}{16}bc=\frac{9}{16}bc$，得 $bc\le16$，后同解法1.

11.【解析】(1) 当 $a=\frac{e}{2}$ 时 $f'(x)=e^x-ex\ge0$，$f(x)$ 没有极值点，结论 (1) 错误；

(2) 考虑函数 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$，$g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 单调递减，

在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，唯一的极小值 $f(2)=\frac{e^2}{4}$。结合图像可知 $a=\frac{e^2}{4}$ 时 $f(x)$ 只有 2 个零点

($x_1=2,x_2<0$)，结论 (2) 错误。(3) $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的唯一零点 x_0 是负数，

注意 $g(-1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2},g(-\frac{1}{2})=\frac{4}{\sqrt{e}}>\frac{1}{2}$，所以结论 (3) 正确.

12.【解析】$f(x)=x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$，关于 $(1,1)$ 中心对称，所以 $f(x)+f(2-x)=2$

所以 $f(\frac{1}{2021})+f(\frac{4041}{2021})=f(\frac{2}{2021})+f(\frac{4040}{2021})=\cdots=f(\frac{2020}{2021})+f(\frac{2022}{2021})=2$，

又 $f(1)=1$，所以 $\sum_{k=1}^{4041}f(\frac{k}{2021})=4041$.

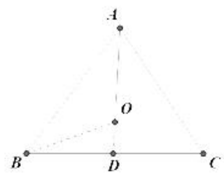
13. 【答案】 2 【解析】 $a=\log_5 10, b=\log_4 10$，得 $\frac{1}{a}=\lg 5, \frac{1}{b}=\lg 4=2\lg 2$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=2\lg 5+2\lg 2=2$

14. 【答案】$[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$（开区间，闭区间均对）

【解析】$f(x)=\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

$x\in[0,\pi]\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$，令 $\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}$ 得 $x\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$。

15. 【答案】$\frac{5}{8}$【解析】问题和三角形大小无关。如图，延长 AO 交 BC 于



D，设 $\overline{AO}=k\overline{AD}$，则 $\overline{AD}=\frac{1}{k}\overline{AO}=\frac{x}{k}\overline{AB}+\frac{y}{k}\overline{AC}$.

因为 D 在 BC 上，所以 $\frac{x}{k}+\frac{y}{k}=1$，$k=x+y$，求 k 的最大值即可.

注意到 $k=\frac{|AO|}{|AD|}=\frac{|AO|}{|AO|+|OD|}$，而 $|AO|$ 是定值，故 $|OD|$ 最小即 $OD\perp BC$ 时，k 取最大值。

此时 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A$，$\cos\angle BOD=\frac{OD}{OB}=\frac{3}{5}$.

$k=\frac{|AO|}{|AO|+|OD|}=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$.

16. 【答案】$[-e,+\infty)$【解析】不等式 $\frac{e^x}{x}+ax-a\ln x\ge 0$ 等价于 $e^{x-\ln x}+a(x-\ln x)\ge 0$，令 $t=x-\ln x$，则 $t\ge 1$，问题转化为 $e^t+at\ge 0$，分离变量 $\frac{e^t}{t}\ge -a$，令 $g(t)=\frac{e^t}{t}$，则 $g'(t)=\frac{(t-1)}{t^2}e^t$，$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(t)\ge g(1)=e$，所以 $-a\le e\Rightarrow a\ge -e$，实数 a 的取值范围是 $[-e,+\infty)$.

解法 2：$\frac{e^x}{x}+ax-a\ln x\ge 0\Leftrightarrow\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{a}{e}(x-\ln x)\ge 0\Leftrightarrow e^{x-\ln x-1}+\frac{a}{e}(x-\ln x)\ge 0$

因为$e^{x-\ln x-1}\ge x-\ln x$，所以不等式等价于$(x-\ln x)(1+\frac{a}{e})\ge 0\Leftrightarrow 1+\frac{a}{e}\ge 0\Leftrightarrow a\ge -e$。

17.【解析】(1)

$$\cos 2B-\sin(B-\frac{\pi}{2})=\cos 2B+\cos B=2\cos^2 B-1+\cos B=0$$

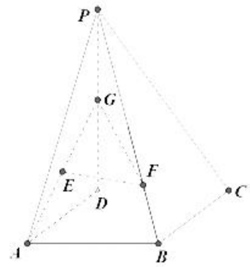
所以$\cos B=\frac{1}{2}$或者$\cos B=-1$（舍去），又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$. ……………… 5分

(2)由余弦定理$b^2=7=a^2+3^2-6a\cos\frac{\pi}{3}$，所以$a=2$（$a=1$时不是锐角三角形，舍去）。

所以$\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin C}=\frac{2+3}{\sin A+\sin C}$，

可得$\sin A+\sin C=\frac{5}{\sqrt{7}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{21}}{14}$ ……………………………………… 10分

18.【解析】(1) 取DG中点H,连接EH,FH,BD,



由中位线定理得$EH//AD$,所以$EH//$平面$ABCD$

又因为$\frac{PH}{HD}=\frac{PF}{FD}=3$,得$HF//BD$.

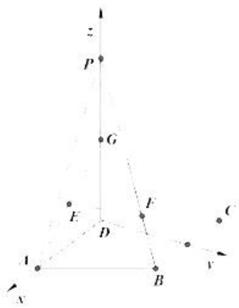
所以$HF//$平面$ABCD$

因为EH,HF是平面EFH内的2条相交直线

所以平面$EFH//$平面$ABCD$,

$EF\subset$平面EFH，因此$EF//$平面$ABCD$；………………………………… 6分

(2) 由题设$PD\perp$底面$ABCD$，建立如图所示空间直角坐标系,

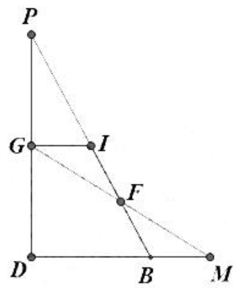


$A(1,0,0),P(0,0,2),G(0,0,1),B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),F(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{1}{2})$

$\overline{GF}=(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8},-\frac{1}{2}),|\overline{GF}|=\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{27}{64}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

易得平面$ABCD$的一个法向量$\vec{n}=(0,0,1).|\vec{n}|=1$

设 GF 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overline{GF},\vec{n}>|=\dfrac{|-\frac{1}{2}|}{1\times\frac{\sqrt{13}}{4}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ ……… 12 分



（2）解析 2，由已知易得直线 GF 在平面 $ABCD$ 上的射影为直线 DB，在平面 PDB 内，延长 GF 交直线 DB 于 M，则 GF 与平面 $ABCD$ 所成角是 $\angle GMD$。过 G 作中位线 GI，易得 $BM=GI=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$，

所以 $DM=\frac{3}{2},GM=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$\sin\angle GMD=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$。

所以 GF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

19. 【解析】（1） $f'(x)=(x+1)e^x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$，

在 $(-\infty,-1)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

所以单调递增区间为 $(-1,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,-1)$. ……………………… 6 分

（2）由题设 $g(x)=xe^x-x-\ln x-1(x>0)$，$g'(x)=(x+1)(e^x-\frac{1}{x})$，令 $g'(x)=0$

得 $x_0e^{x_0}=1$，$x_0+\ln x_0=0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

$g(x)$ 在 $x=x_0$ 取唯一的极小值，也是最小值，$g(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0-1=0$

所以 $g(x)\ge g(x_0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立. ……………………………………… 12 分

另解：$g(x)=xe^x-x-\ln x-1=e^{x+\ln x}-(x+\ln x)-1$，证 $h(t)=e^t-t-1\ge 0$ 即可。

20. 【解析】（1）由 $S_5=5a_3=25\Rightarrow a_3=5$，又 $a_2=3\Rightarrow d=2$，

所以 $a_n=3+(n-2)\times 2=2n-1$。因为 $a_1=1,a_1b_1=(2-3)\times 2^1+3=1\Rightarrow b_1=1$。

由题设 $n>1$ 时，$a_nb_n=(2n-3)2^n+3-(2n-5)2^{n-1}-3=(2n-1)2^{n-1}$

得 $b_n=2^{n-1}(n>1)$，当 $n=1$ 时也满足，所以 $b_n=2^{n-1}(n\in N^*)$. …………………… 6 分

（2）$c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots c_n=\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$2T_n=2+\frac{3}{1}+\frac{5}{2}+\frac{7}{4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-2}}$，

错位相减得 $T_n=4+\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\cdots\frac{2}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$

因为 $n\in N^*,\frac{2n+3}{2^{n-1}}>0$，所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots c_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}<6$ ………………… 12 分

21.【解析】（1）由题设易得 $AC=4,\angle ACD=\angle CBA=\frac{\pi}{3},\angle ACB=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$

当 $AM=3CM$ 时，$CM=1$，由余弦定理

$DM^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=3,\ BM^2=(2\sqrt{3})^2+1^2-2\times1\times2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6}=7,$

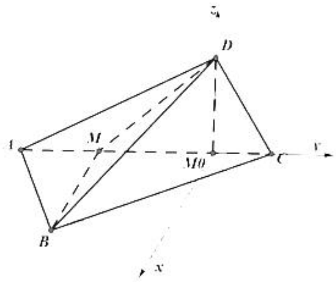
在 $\triangle BDM$ 中 $BM^2+DM^2=3+7=10=BD^2$，得 $DM\perp BM$．

又 $\triangle CDM$ 中 $CM^2+DM^2=1+3=4=CD^2$，得 $DM\perp CM$．

因为 BM,CM 是平面 ABC 内的 2 条相交直线，所以 $DM\perp$ 平面 ABC，

显然 $AB\subset$ 平面 ABC，故 $AB\perp DM$． ……………………………………………… 6 分

（2）记（1）中 M 点位置为 M_0，建立如图所示的空间直角坐标系，得各点坐标



$A(0,-3,0),C(0,1,0),B(\sqrt{3},-2,0),D(0,0,\sqrt{3})$

令 $M(0,m,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},2,\sqrt{3}),\overrightarrow{DM}=(0,m,-\sqrt{3})$

设平面 BDM 的一个法向量 $n_1=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}x+2y+\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}=my-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $y=\sqrt{3}\Rightarrow z=m,x=2+m$

所以 $n_1=(2+m,\sqrt{3},m)$，易得平面 ADM 的一个法向量是 $n_2=(1,0,0)$，

当二面角 $A-DM-B$ 是直二面角时，$n_1\cdot n_2=2+m=0$，所以 $m=-2$，

此时 $AM=1,CM=3$，所以 $\frac{AM}{CM}=\frac{1}{3}$ ……………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$

当 $a\le 0$ 时 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 没有极值点

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=a$，在 $(0,a)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。所以函数 $f(x)$ 有极小值点 $x=a$，无极大值点. .... 4 分

(2) 问题等价于 $h(x)=f(x)-g(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$ 有 3 个不相等的零点，

函数的定义域是 $(0,+\infty)$，求导得 $h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，

记 $p(x)=x^2-ax+1$ .... 5 分

当 $a\le 0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上 $p(x)>0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，不可能有 3 个零点. ..... 6 分

当 $0<a\le 2\Rightarrow \Delta=a^2-4\le 0$，

同样可得 $p(x)\ge 0,h'(x)\ge 0.h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不可能有 3 个零点.

当 $a>2$ 时，令 $p(x)=x^2-ax+1=0$，得 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

由韦达定理 $x_1x_2=1,x_1+x_2=a>2$，所以 $0<x_1<1<x_2$. .... 7 分

在 $(0,x_1)$ 上 $p(x)>0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

在 $(x_2,+\infty)$ $p(x)>0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

在 (x_1,x_2) 上 $p(x)<0,h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，因为 $1\in(x_1,x_2),h(1)=0$，

所以 $h(x_1)>h(1)=0>h(x_2)$. .... 8 分

在区间 $(x_2,+\infty)$ 考察 $h(a^2)$ 的取值。

因为 $h(a^2)=a^2-\frac{1}{a^2}-a\ln a^2(a>2)$，

记 $q(a)=a^2-\frac{1}{a^2}-a\ln a^2(a>2)$

求导得 $q'(a)=2a+\frac{2}{a^3}-2(\ln a+1)=2(a-\ln a-1)+\frac{2}{a^3}>\frac{2}{a^3}>0$

这里证明一下，当 $a>2$ 时，$s(a)=a-\ln a-1\ge 0$，

因为 $s'(a)=1-\frac{1}{a}>0, s(a)>s(1)=0$

所以 $q(a)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$q(a)>q(2)=4-\frac{1}{4}-4\ln 2>0$ 即 $h(a^2)>0$. ……………………………… 9 分

在 $h(x)$ 单调递增的区间 $(x_2,+\infty)$ 上，$h(x_2)<0, h(a^2)>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(x_2,a^2)$ 使得 $h(x_0)=0$. ……………………………… 10 分

注意到 $h(x_0)+h(\frac{1}{x_0})=x_0-\frac{1}{x_0}-a\ln x_0+\frac{1}{x_0}-x_0-a\ln\frac{1}{x_0}=0$，所以 $h(\frac{1}{x_0})=0$

由 $x_0>x_2\Rightarrow\frac{1}{x_0}<\frac{1}{x_2}=x_1$，

所以在单调递增的区间 $(0,x_1)$ 上有唯一的零点 $\frac{1}{x_0}$. ……………………………… 11 分

综上所述，函数 $f(x)$ 的图像与 $g(x)=\frac{1}{x}$ 的图像有 3 个不同的交点时，

实数 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$ ……………………………… 12 分