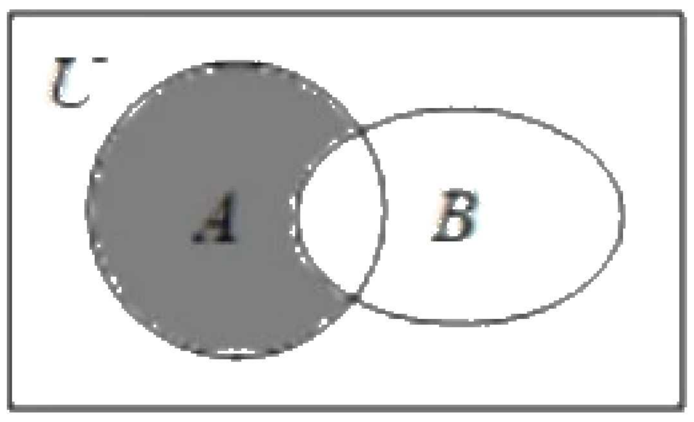
文 科 数 学

一、单选题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知全集$U=R$，集合$A=\{x|0\le x\le 4\}$，$B=\{x|-2<x<2\}$，则图中阴影部分表示的集合为



A. $\{x|2\le x\le 4\}$　　B. $\{x|0\le x<2\}$　　C. $\{x|-2<x\}$　　D. $\{x|-2<x\le 0\}$

2. 已知i是虚数单位，则$i^{2023}=$

A. i　　B. $-i$　　C. -1　　D. 1

3. 已知函数$f(x)=ax^5+b\sin x+c$，若$f(-1)+f(1)=2$，则$c=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

4. 蟋蟀鸣叫可以说是大自然优美、和谐的音乐，殊不知蟋蟀鸣叫的频率x(每分钟鸣叫的次数)与气温y(单位：℃)存在着较强的线性相关关系. 某地观测人员根据下表的观测数据，建立了y关于x的线性回归方程$\hat{y}=0.25x+k$.则当蟋蟀每分钟鸣叫80次时，该地当时的气温预报值为

x(次数/分钟)	20	30	40	50	60
y(℃)	25	27.5	29	32.5	36

A. 38 ℃　　B. 39 ℃　　C. 40 ℃　　D. 41 ℃

5. 双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c$，若$a^2,b^2,c^2$成等差数列，则双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

6. 已知AB为圆O的一条弦，且$|AB|=2$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A. 4　　B. -4　　D. -2

7. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$，$BC=2$，$AA_1=5$，则A_1C与平面$ABCD$所成角的正切值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\sqrt{5}$

8. 化简$sin^4 15^\circ - sin^4 75^\circ =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

9. 《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作，书中称轴截面为等腰直角三角形的圆锥为直角圆锥，则直角圆锥侧面展开图的圆心角的弧度数为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　C. $\sqrt{2}\pi$　　D. $2\sqrt{2}\pi$

10. ΔABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知$9sin^2B = 4sin^2A$，$cosC = \frac{1}{4}$，则$\frac{c}{a} =$

A. $\frac{\sqrt{11}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{11}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

11. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数：1，1，2，3，5，…，从第三项起，每个数等于它前面两个数的和，即$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in N^*)$，后来人们把这样的一列数组成的数列$\{a_n\}$称为“斐波那契数列”.记$a_{2023} = m$，则$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2022} =$

A. $m-2$　　B. $m-1$　　C. m　　D. $m+1$

12. 已知$f(x) = \frac{ae^x}{x} - x$，$x \in (0, +\infty)$，对$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，且$x_1 < x_2$，恒有$\frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1} < 0$，则实数$a$的取值范围是

A. $[\frac{2}{e}, +\infty)$　　B. $(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$　　C. $(-\infty, e^2]$　　D. $(-\infty, e^{-\frac{1}{2}}]$

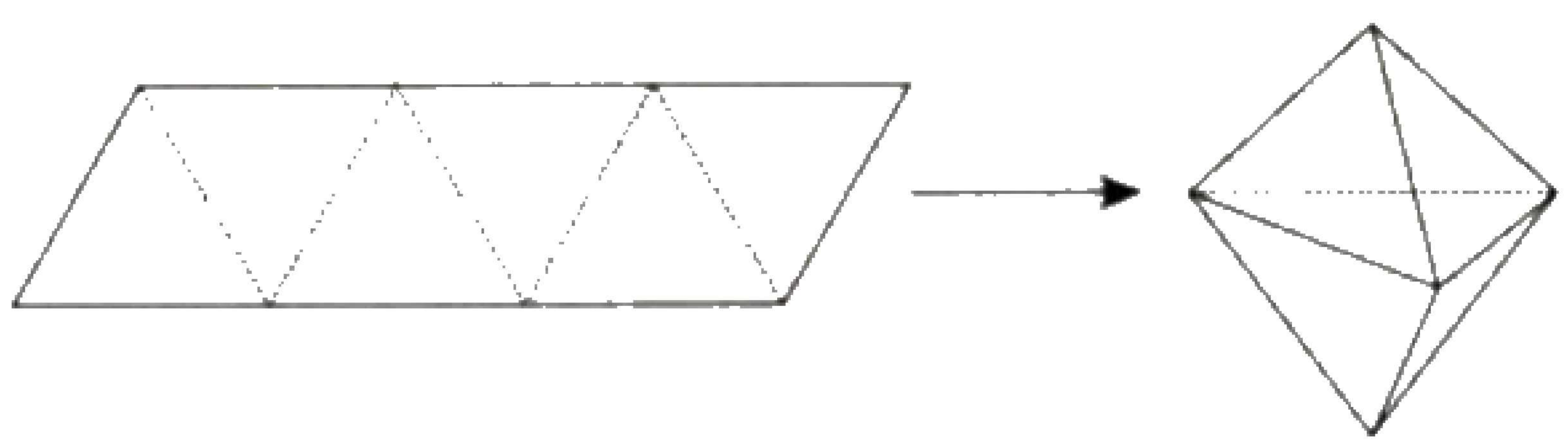
二、填空题（共4小题，每小题5分，共20分.）

13. 抛物线$y = ax^2$的准线方程是$y = 1$，则$a =$

14. 已知函数$f(x) = 4^x - 2^{x+2} - 1$，$x \in [0,3]$，则其值域为______.

15. 若a，$b \in \{-1, 1, 2\}$，则函数$f(x) = ax^2 + 2x + b$有零点的概率为______.

16. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粒，古称“角黍”.如图，是由六个边长为3的正三角形构成的平行四边形形状的纸片，某同学将其沿虚线折起来，制作了一个粽子形状的六面体模型，则该六面体的体积为______;若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为______.



三、解答题（共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.）

（一）必考题：共 60 分

17. (本小题**12**分)

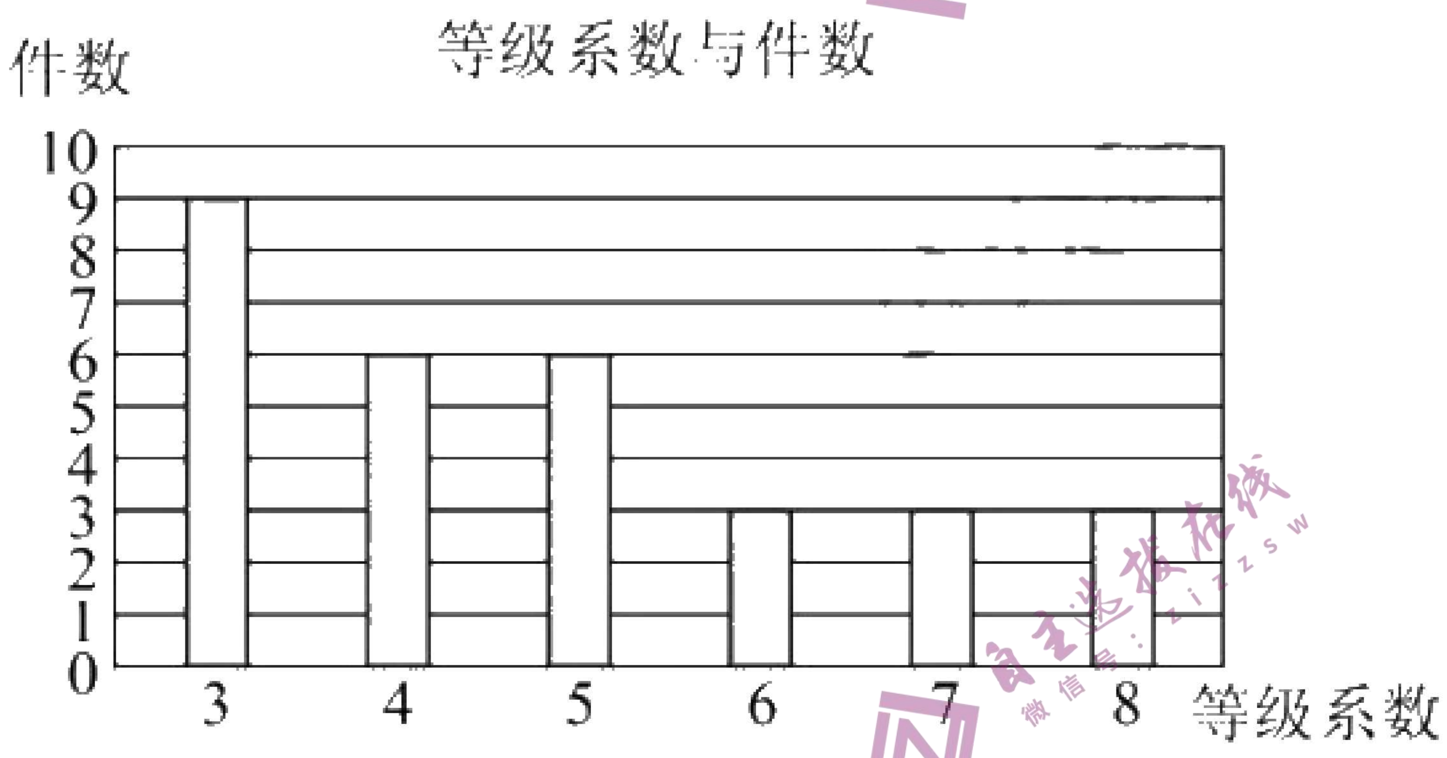
已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_5=25$，且a_3-1，a_4+1，a_7+3成等比数列.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若$b_n=(-1)^n a_n+1$，T_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，求T_{2n}.

18. (本小题**12**分)

搪瓷是在金属坯体表面涂搪瓷釉而得到的制品．曾经是人们不可或缺的生活必备品，厨房用具中的锅碗瓢盆；喝茶用到的杯子，洗脸用到的脸盆；婚嫁礼品等，它浓缩了上世纪整整一个时代的记忆．某搪瓷设计公司新开发了一种新型复古搪瓷水杯，将其细分成**6**个等级，等级系数X依次**3**，**4**，**5**，**6**，**7**，**8**，该公司交给生产水平不同的A和B两个厂生产，从B厂生产的搪瓷水杯中随机抽取**30**件，相应的等级系数组成一个样本，数据如图所示.

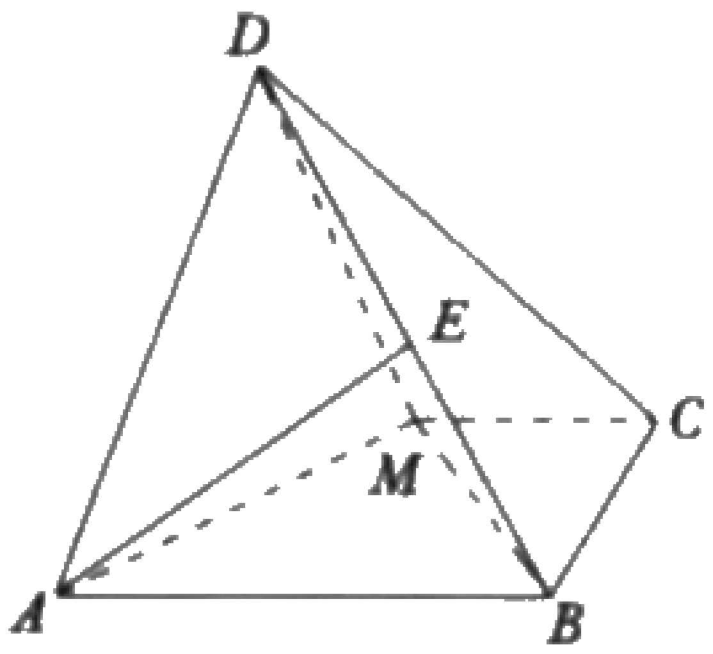


(**1**)依据图表，若从上述等级系数为**7**和**8**的搪瓷水杯中抽取**2**件，求这两件全部来自等级系数为**8**的搪瓷水杯的概率；

(**2**)若A厂生产搪瓷水杯的等级系数的平均值为**6**，在电商平台上A厂生产的搪瓷水杯的零售价为**36**元/件，B厂生产的搪瓷水杯的零售价为**30**元/件．设$L=\dfrac{产品等级系数的平均值}{产品零售价}$，若以$L$的值越大，产品越具可购买性为判断标准．根据以上数据，哪个工厂的产品更具可购买性？说明理由.

19. (本小题12分)

如图，ΔADM是等腰直角三角形，$AD \perp DM$，四边形$ABCM$是直角梯形，$AB \perp BC$，$MC \perp BC$，且$AB = 2BC = 2CM = 2$，平面$ADM \perp$平面$ABCM$.



(1)求证：$AD \perp BM$;

(2)若点E是线段DB上的一动点，问点E在何位置时，三棱锥$M-ADE$的体积为$\frac{\sqrt{2}}{18}$?

20. (本小题12分)

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，其左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$T$为椭圆$C$上任意一点，$\triangle TF_1F_2$面积的最大值为$1$.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)已知$A(0,1)$，过点$(0,\frac{1}{2})$的直线l与椭圆C交于不同的两点M，N，直线AM，AN与x轴的交点分别为P，Q，证明：以PQ为直径的圆过定点.

21. (本小题12分)

已知函数$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$.

(1)讨论$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调性；

(2)若对于任意$x \in [0,\frac{\pi}{2}]$，若函数$f(x) \le kx$恒成立，求实数k的取值范围.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分.

[选修 4—4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-t \\ y=\sqrt{3}-t \end{cases}$ （t 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C_1 的直角坐标方程；

(2) 在直角坐标系中，若把曲线 C_1 图象向下平移 2 个单位，然后横坐标不变，纵坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$，得到曲线 C_2，直线 l 与曲线 C_2 交于点 M、N，与 x 轴交于点 P，求 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$ 的值.

23. [选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-3|$.

(1) 当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 2x$ 的解集；

(2) 若不等式 $f(x)\leq\frac{1}{2}a+5$ 的解集非空，求 a 的取值范围.