

绝密★启用前

2023 年合肥六中高三最后一卷

## 数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | x^2 < 4x\}$ ,  $N = \{x | |x - 1| \geq 3\}$ , 则  $M \cup N =$   
A.  $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x > 4\}$  B.  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 4\}$   
C.  $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 4\}$  D.  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 0\}$
2. 已知  $(2 - i)z = -3 + 4i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$   
A.  $\sqrt{3}$  B. 3 C.  $\sqrt{5}$  D. 5
3. 下列命题为真命题的是  
A. “ $a^2 > b^2$ ”是“ $a > b$ ”的必要不充分条件  
B. “ $2^{2x-1} \leq 128$ ”是“ $3 < x < 4$ ”的充分不必要条件  
C.  $\forall x \in [1, 2)$ ,  $x^2 - a \leq 0$  成立的一个充分不必要条件是  $a > 4$   
D. “ $\exists x > 1, e^{2x} \geq x + 1$ ”的否定是“ $\forall x \leq 1, e^{2x} < x + 1$ ” ( $e$  为自然对数的底数)
4. 某学校高三 1 班至 4 班举办研学游活动, 有 4 个地方可供选择, 且每班只能去一个地方. 设事件  $M =$ “4 个班去的地方各不相同”,  $N =$ “1 班独自去一个地方”, 则  $P(M|N) =$   
A.  $\frac{2}{9}$  B.  $\frac{1}{4}$  C.  $\frac{1}{3}$  D.  $\frac{4}{9}$
5. 已知向量  $a$  与  $b$  的夹角为  $\theta$ , 定义  $a \times b$  为  $a$  与  $b$  的“向量积”, 且  $a \times b$  是一个向量, 它的长度为  $|a \times b| = |a||b|\sin \theta$ , 若  $u = (4, 0)$ ,  $u + v = (2, 2\sqrt{3})$ , 则  $|u \times (u - v)| =$   
A.  $2\sqrt{3}$  B.  $4\sqrt{3}$  C.  $8\sqrt{3}$  D. 12
6. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 2, b > 0$ ) 的焦距为  $2c$  ( $c > 0$ ), 已知点  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ , 点  $(2, 0)$  到直线  $AB$  的距离为  $d_1$ , 点  $(-2, 0)$  到直线  $AB$  的距离为  $d_2$ , 且  $d_1 + d_2 \geq \frac{4}{5}c$ , 则双曲线离心率的取值范围为  
A.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$  B.  $[\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}]$  C.  $[\frac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10}]$  D.  $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

数学试题 第 1 页 (共 4 页)

7. 已知在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 1, AA_1 = \sqrt{3}$ , 在线段  $A_1D$  上取点  $M$ , 在  $CD_1$  上取点  $N$ , 使得直线  $MN \parallel$  平面  $ACC_1A_1$ , 则线段  $MN$  长度的最小值为

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{21}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{7}$       D.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$

8. 已知函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} - (a+1)x$  ( $e$  为自然对数的底数,  $0 < a < 1$ ),  $m, n$  分别为函数  $f(x)$  的极大值点和极小值点, 若  $f(m) > f(n)$  恒成立, 则实数  $t$  的取值范围为

- A.  $(-\infty, -1]$       B.  $(-\infty, -\frac{1}{2})$       C.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$       D.  $[1, +\infty)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数  $f(x) = e^x + 2$  ( $e$  为自然对数的底数), 则下列结论正确的是

- A. 曲线  $y = f(x)$  的切线斜率可以是  $-2$   
 B. 曲线  $y = f(x)$  的切线斜率可以是  $3$   
 C. 过点  $(0, 2)$  且与曲线  $y = f(x)$  相切的直线有且只有 1 条  
 D. 过点  $(1, 4)$  且与曲线  $y = f(x)$  相切的直线有且只有 2 条

10. 用“五点法”画函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$ ) 在一个周期内的图象时, 列表并填入的部分数据如下表, 则下列说法正确的是

$x$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$	
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	2	0	-2	0

- A.  $A = 2$   
 B. 不等式  $f(x) \geq 1$  的解集为  $[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 C. 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{3}$  对称  
 D. 函数  $f(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12})$  上单调递增
11. 设定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的导函数分别为  $f'(x)$  和  $g'(x)$ , 若  $f(x+2) - g(1-x) = 2, f'(x) = g'(x)$ , 且  $g(x)$  为奇函数, 则下列说法中一定正确的是
- A.  $f(x) = g(x)$       B.  $f'(x)$  为偶函数  
 C.  $g'(x)$  的图象关于点  $(\frac{3}{2}, 0)$  对称      D.  $f(x)$  的一个周期为 6
12. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, a_1 = 1, a_{n+1}a_n = \lambda(a_n - a_{n+1})$ , 且  $a_n \neq 0$ , 则
- A.  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , 使得  $a_{n+1} > 0$       B.  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , 使得  $a_{n+1} < a_n$   
 C.  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , 使得  $S_{n+1} < S_n$       D. 若  $S_n \leq S_6$ , 则  $a_7 > a_8$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 圆心在直线  $y = -x$  上, 且与直线  $y = 1 + 2x$  相切于点  $M(-1, -1)$  的圆的标准方程为

14. 在报名的 4 名男生和 3 名女生中, 选取 3 人参加志愿服务, 要求男生女生都有, 则不同的选取方法的种数为\_\_\_\_\_。(用数字填写答案)
15. 已知锐角  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c, B = 60^\circ, ac = 6$ , 点  $D$  在边  $AC$  上, 且  $BD \perp AC$ . 过点  $D$  分别作边  $AB, BC$  的垂线, 垂足分别为  $M, N$ , 设  $BM = m, BN = n$ , 则  $m^2 + n^2 - mn$  的最大值为\_\_\_\_\_.
16. 已知抛物线  $C: x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ , 直线  $l: x = 5$ , 点  $A, B$  分别是抛物线  $C$ 、直线  $l$  上的动点, 若点  $B$  在某个位置时, 仅存在唯一的点  $A$  使得  $|AF| = |AB|$ , 则满足条件的所有  $|AB|$  的值为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

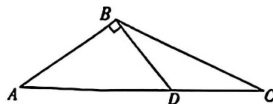
17. (10 分)

在①  $4a \sin C = 3c \cos A$ , ②  $6b \cos \frac{B+C}{2} = \sqrt{10} a \sin B$  这两个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 然后解答补充完整的题.

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知\_\_\_\_\_,  $a = 3\sqrt{2}$ .

(I) 求  $\sin A$ ;

(II) 如图,  $D$  为边  $AC$  上一点,  $DC = DB, AB \perp BD$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.



18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足:  $a_1 = 1, a_2 = t (t \in \mathbb{R}), b_n = a_n a_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ .

(I) 若  $\{a_n\}$  是等比数列, 求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

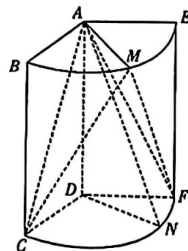
(II) 若  $\{b_n\}$  是等比数列, 则  $\{a_n\}$  是否为等比数列? 请阐述你的观点, 并说明理由.

19. (12 分)

如图所示的几何体是圆柱的一部分, 它是由矩形  $ABCD$  (及其内部) 以边  $AD$  所在直线为旋转轴旋转  $\frac{2\pi}{3}$  得到的,  $M$  是  $BE$  的中点.

(I) 设  $N$  是  $\widehat{CF}$  上的一点, 且  $AN \perp CD$ , 求  $\angle FDN$  的大小;

(II) 当  $AB = 2, AD = 4$  时, 求二面角  $C-AM-F$  的余弦值.

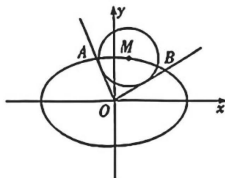


数学试题 第 3 页 (共 4 页)

20. (12分)

如图,在平面直角坐标系  $xOy$  中,点  $M(x_0, y_0)$  在椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  上,从原点  $O$  向圆  $M: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 (r>0)$  作两条切线分别与椭圆  $\Gamma$  交于点  $A, B$ ,若直线  $OA, OB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ,且  $k_1 k_2 = -\frac{3}{4}$ .

- (I) 求圆  $M$  的半径  $r$ .  
 (II) 探究  $|OA|^2 + |OB|^2$  是否为定值? 若是,请求出该定值;若不是,请说明理由.



21. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln x + 2ax + 1, g(x) = x(e^x + 1)$  ( $e$  为自然对数的底数).

- (I) 若函数  $f(x)$  的最大值为 0, 求  $a$  的值;  
 (II) 若对于任意正数  $x, f(x) \leq g(x)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

22. (12分) 公众号: 全元高考

在上海举办的第五届中国国际进口博览会中,一款无导线心脏起搏器引起广大参会者的关注,成为了进博会的“明星展品”. 体积仅有维生素胶囊大小,体积比传统心脏起搏器减小 93%,重量仅约 2 克,拥有强大的电池续航能力,配合兼容 1.5T/3.0T 全身核磁共振扫描检查等创新功能. 在起搏器研发后期,某企业快速启动无线充电器主控芯片生产,试产期每天都需同步进行产品检测,检测包括智能检测和人工检测,选择哪种检测方式的规则如下:第一天选择智能检测,随后每天由计算机随机等可能生成数字“0”和“1”,连续生成 4 次,把 4 次的数字相加,若和小于 3,则该天的检测方式和前一天相同,否则选择另一种检测方式.

- (I) 求该企业前三天的产品检测选择智能检测的天数  $X$  的分布列.  
 (II) 当地政府为了检查该企业是否具有一定的智能化管理水平,采用如下方案:设  $p_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 表示事件“第  $n$  天该企业产品检测选择的是智能检测”的概率,若  $p_n > \frac{1}{2}$  恒成立,认为该企业具有一定的智能化管理水平,将给予该企业一定的奖励资金,否则将没有该项奖励资金. 请问该企业能拿到奖励资金吗? 请说明理由.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

