

黄山市 2023 届高中毕业班第一次质量检测

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	C	D	A	C	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AC	AB	ACD	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $a = \pm 1$ 14. 2 15. $2\sqrt{2}$ 16. $y = -\frac{3}{4}x + 1$ 或 $y = \frac{3}{4}x + 1$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 由三角函数定义，B 点坐标为 $(\cos \frac{7\pi}{12}, \sin \frac{7\pi}{12})$ ，所以 $\overrightarrow{AO} = (-1, 0)$ ，

$\overrightarrow{AB} = (\cos \frac{7\pi}{12} - 1, \sin \frac{7\pi}{12})$ ，.....2 分

所以 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 - \cos \frac{7\pi}{12} = 1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，.....5 分

(2) (本题也可转化为定边对定角最值问题)

设 $\angle AOB = \theta$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，则 $\angle AOC = \frac{4\pi}{3} - \theta$ ，

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin(\frac{4\pi}{3} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，
.....8 分

又 $\theta - \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ ，所以当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时， $\triangle ABC$ 面积的最大为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，.....10 分

(其他方法酌情给分)

18. 解：(1) $\because a_{n+1} + a_n = 2n + 3 (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$

$\therefore a_n + a_{n+1} = 2n + 5$ ，

$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} = 2n + 7$ ，所以 $a_{n+2} - a_n = 2$ ，.....2 分

$\therefore \{a_n\}$ 的奇数项与偶数项各自成等差数列且公差均为 2，

$\because a_2 = 4$ ，则 $a_1 = 3$ ，.....5 分

$\therefore$ 对 $k \in \mathbb{N}^*$ ， $a_{2k-1} = a_1 + 2(k-1) = 2k-1$ ， $a_{2k} = 2k$ ，

所以 n 为奇数时, $a_n = n + 2$,

对 $k \in \mathbf{N}^+$, $a_{2k} = a_2 + 2(k-1) = 2k + 2$,

所以 n 为偶数时, $a_n = n + 2$,

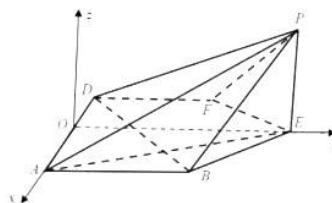
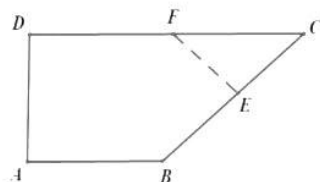
综上所述, $a_n = n + 2$, $n \in \mathbf{N}^+$7 分

(2) 由 (1) 得 $b_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ \log_{(n+1)}(n+2), n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+ \end{cases}$ 9 分

$\therefore b_1 b_2 b_3 \cdots b_k = 2 \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{k+1} (k+2) = 2 \log_3 (k+2) = 8$ 11 分

解得 $k = 79$12 分

19.



(1) 证明: 由题意, 连接 BD , BF , 因为 $CD = 2AB = 2AD = 4$, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, 点 F 是边 CD 的中点, 所以 $BF = CF = 2$, 则 $BC = 2\sqrt{2}$,

又点 E 是 BC 边的中点, 则 $EF \perp BC$, 在折起中 $PE \perp EF$2 分

又 $BE^2 + PE^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 = BP^2$, 所以 $PE \perp BE$,

又 $BE \cap EF = E$, $BE \subset$ 平面 ABD , $EF \subset$ 平面 ABD

故 $PE \perp$ 平面 ABD , 又 $PE \subset$ 平面 APE , 所以 平面 $APE \perp$ 平面 ABD5 分

(2) 由 (1) 取 AD 的中点 O , 连接 OE , 以 OA , OE 所在的直线分别为 x , y 轴, 过点 O 作垂直于平面 $ABEFD$ 的为 z 轴建立空间直角坐标系如图所示。

则 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $P(0, 3, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (-1, 3, \sqrt{2})$,
 $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0)$ 7 分

令平面 ADP 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$

则 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AD}$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -x_1 + 3y_1 + \sqrt{2}z_1 = 0$ 令 $y_1 = 2$, 则 $z_1 = -3\sqrt{2}$, 得 $\vec{n} = (0, 2, -3\sqrt{2})$
.....9 分

令平面 ABP 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$

则 $\vec{m} \perp \vec{AB}$, $\vec{m} \cdot \vec{AB} = 2y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$\vec{m} \perp \vec{AP}$, $\vec{m} \cdot \vec{AP} = -x_2 + 3y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0$ 令 $x_2 = 2$, 则 $z_2 = \sqrt{2}$, 得 $\vec{m} = (2, 0, \sqrt{2})$

$$\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{-6}{\sqrt{22} \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{33}}{11}$$

平面 ABP 与平面 ADP 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{11}$,12 分

20. 解: (1) 由已知可得: $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 420$, $\hat{y} = -112x + 756$,3 分

当 $-112x + 756 < 50 (x \in \mathbb{N}^+)$ 时, $x \geq 7$, 从第 7 月份开始该学校体重超重的人数降至 50 人以下,5 分

(2) ① 知 $P_1 = 0$; $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{19}{30}$;7 分

② 由题知 X 的可能取值为: 0, 1, 2;

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{37}{60};$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{37}{60}$	$\frac{13}{60}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{37}{60} + 2 \times \frac{13}{60} = \frac{21}{20}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 已知 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $a^2 = 2b^2$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

由直线 $y=1$ 截椭圆 Γ 所得的弦长为 $2\sqrt{6}$, 知点 $(\sqrt{6}, 1)$ 在椭圆上, 故 $\frac{(\sqrt{6})^2}{2b^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$, 得

$$b^2 = 4, a^2 = 8, \text{ 故椭圆 } \Gamma \text{ 的标准方程 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 设直线 AB 的方程为 $y = k_1x + 1$, 与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 联立得 $(2k_1^2 + 1)x^2 + 4k_1x - 6 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由韦达定理可知 $x_1 + x_2 = -\frac{4k_1}{2k_1^2 + 1}$, $x_1x_2 = -\frac{6}{2k_1^2 + 1}$

设直线 CD 的方程为 $y = k_2x + 1$, 与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 联立得 $(2k_2^2 + 1)x^2 + 4k_2x - 6 = 0$,

设 $A(x_3, y_3)$, $B(x_4, y_4)$, 由韦达定理可知 $x_3 + x_4 = -\frac{4k_2}{2k_2^2 + 1}$, $x_3x_4 = -\frac{6}{2k_2^2 + 1}$ 6 分

所以, 直线 AD 的方程为 $y = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}(x - x_1) + y_1$, 令 $y = 1$ 得

$$x_E = \frac{x_1y_4 - x_4y_1 + x_4 - x_1}{y_4 - y_1} = \frac{x_1(k_2x_4 + 1) - x_4(k_1x_1 + 1) + x_4 - x_1}{y_4 - y_1} = \frac{x_1x_4(k_2 - k_1)}{y_4 - y_1},$$

同理得

$$x_F = \frac{x_2y_3 - x_3y_2 + x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = \frac{x_2(k_2x_3 + 1) - x_3(k_1x_2 + 1) + x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = \frac{x_2x_3(k_2 - k_1)}{y_3 - y_2} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} x_E + x_F &= \frac{x_1x_4(k_2 - k_1)}{y_4 - y_1} + \frac{x_2x_3(k_2 - k_1)}{y_3 - y_2} \\ &= \frac{(k_2 - k_1)}{(y_4 - y_1)(y_3 - y_2)} [x_1x_4(y_3 - y_2) + x_2x_3(y_4 - y_1)] \\ &\because x_1x_4(y_3 - y_2) + x_2x_3(y_4 - y_1) = x_1x_4(k_2x_3 - k_1x_2) + x_2x_3(k_2x_4 - k_1x_1) \\ &= k_2x_1x_4(x_1 + x_2) - k_1x_1x_2(x_3 + x_4) = k_2(-\frac{6}{2k_2^2 + 1})(-\frac{4k_1}{2k_1^2 + 1}) - k_1(-\frac{6}{2k_1^2 + 1})(-\frac{4k_2}{2k_2^2 + 1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $x_E + x_F = 0$, 于是 $|PE| = |PF|$ 12 分

22. 解: (1) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - k = \frac{2x^2 - kx + 1}{x} (x > 0)$ 1 分

当 $k \leq 0$ 时, 由于 $x > 0$, 故 $kx \geq 0$, 于是 $2x^2 - kx + 1 > 0$,

$\therefore f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;2 分

当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 即 $2x^2 - kx + 1 = 0$, $\Delta = k^2 - 8 = (k + 2\sqrt{2})(k - 2\sqrt{2})$

若 $0 < k \leq 2\sqrt{2}$, $\Delta \leq 0$, $\therefore f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;3 分

若 $k > 2\sqrt{2}$, $\Delta > 0$, $2x^2 - kx + 1 = 0$ 有两根 x_1, x_2 (不妨设 $x_1 < x_2$)

$$\text{解得 } x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 8}}{4}, x_2 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 8}}{4},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{k}{2} > 0, x_1 x_2 = \frac{1}{2} > 0, \therefore 0 < x_1 < x_2,$$

当 $0 < x < x_1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增

综上: $k \leq 2\sqrt{2}$ 时, $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, +\infty)$, 无单调减区间;

$k > 2\sqrt{2}$ 时, $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, \frac{k - \sqrt{k^2 - 8}}{4})$, $(\frac{k + \sqrt{k^2 - 8}}{4}, +\infty)$, 单调减区间是 $(\frac{k - \sqrt{k^2 - 8}}{4}, \frac{k + \sqrt{k^2 - 8}}{4})$6 分

(2) 若不等式 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 即 $\ln x - kx + 1 \leq -3x + xe^x$ 恒成立, 因为 $x > 0$

$$\text{即 } k \geq (\frac{\ln x + 1}{x} - e^x + 3)_{\max}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{记 } h(x) = \frac{\ln x + 1}{x} - e^x + 3 \quad h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} - e^x = \frac{-\ln x - x^2 e^x}{x^2}$$

$$\text{记 } \varphi(x) = -\ln x - x^2 e^x, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x} - (2x + x^2)e^x < 0, \varphi(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 递减, 又}$$

$$\varphi(1) = -e < 0, \varphi(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{e}{e^2} > 0,$$

所以存在 $x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$, 使 $\varphi(x_0) = 0$, 即 $-\ln x_0 = x_0^2 e^{x_0}$

且 $x \in (0, x_0)$, $\varphi(x) > 0, h(x)$ 递增; $x \in (x_0, +\infty)$, $\varphi(x) < 0, h(x)$ 递减.

$$\text{所以 } h_{\max}(x) = h(x_0) = \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} - e^{x_0} + 3, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又由 } -\ln x_0 = x_0^2 e^{x_0}, \text{ 得 } \ln(-\ln x_0) = 2 \ln x_0 + x_0,$$

$$\text{即 } \ln(-\ln x_0) + (-\ln x_0) = \ln x_0 + x_0,$$

$$\text{由函数 } y = \ln t + t \text{ 递增, 可知 } -\ln x_0 = x_0, e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

$$\text{所以 } h(x_0) = \frac{-x_0 + 1}{x_0} - \frac{1}{x_0} + 3 = 2$$

$$\text{所以 } k \geq 2. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线