

数学

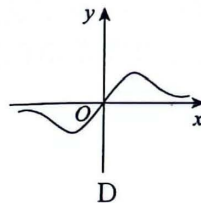
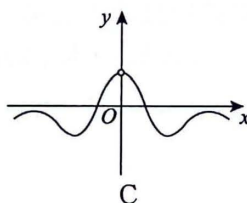
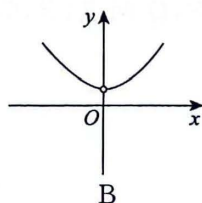
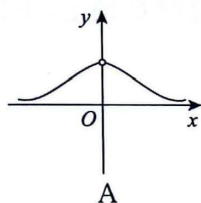
全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 复数 $z = a + 2i$, $z^2 - 2z$ 是实数, 则 $|z| =$ ()
A. 5 B. 10 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$
2. 已知全集 $I = \mathbf{R}$, $M = \{x \mid x < 1\}$, $N = \{x \mid \log_2 x < 1\}$, 则 $(\complement_I M) \cap N =$ ()
A. $[1, +\infty)$ B. $[1, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1, 2)$
3. 函数 $f(x) = \frac{3x}{e^x - e^{-x}}$ 的大致图象是 ()



4. 已知 $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$) 图象上两条相邻的对称轴, 则 $\varphi =$ ()
A. π B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$
5. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 6x + 18}$, 则 ()
A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 是奇函数
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 3$ 对称 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(3, 1)$ 成中心对称
6. 毕业典礼上, 某班有 a, b, c, d, e, f 六人站一排照相, 要求 a, b 两人均不在排头, 且 e, f 两人不相邻, 则不同的排法种数为 ()
A. 160 B. 288 C. 336 D. 480
7. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 $M(-2, 2)$, 过 F 的直线 l 垂直于 MF , 且 l 交抛物线于 A, B 两点, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$ ()
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

8. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB=2$, E, F, G 分别为 AB, PC, AD 的中点, 直线 BF 与 EG 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则三棱锥 $P-EFG$ 的体积为 ()

- A. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 满足 $a > b > c > d > 0$, 则 ()

- A. $\sin a > \sin b$ B. $a - \sin a > b - \sin b$
C. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ D. $ad + bc > ab + cd$

10. 已知 $\theta \in (0, 2\pi)$, O 为坐标原点, θ 终边上有一点 $M\left(\sin \frac{3\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8}, \sin \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8}\right)$, 则 ()

- A. $\theta = \frac{3\pi}{8}$ B. $|OM| = \sqrt{2}$ C. $\tan \theta < 1$ D. $\cos \theta > \frac{1}{2}$

11. 已知在等边三角形 ABC 中, $AB=2$, D 为 AC 的中点, E 为 BD 的中点, 延长 CE 交 AB 于点 F , 则 ()

- A. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$
C. $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}$ D. $S_{\triangle DEC} = 2S_{\triangle BEF}$

12. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}$ (n 为正整数), S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 ()

- A. $a_2 = 1$ B. $a_{2024} = 1\ 012$
C. $S_n = \frac{n(n+1)}{4}$ D. $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < 3$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{m^2+4} = 1 (m > 0)$ 的离心率为 2, 则实数 $m =$ _____.

14. 已知 $f(x) = \log_a x + \log_{a+2} x$ ($0 < a < 1$) 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 已知一个圆台内切球的半径为 $\sqrt{2}$, 圆台的表面积为 14π , 则这个圆台的体积为 _____.

16. 现有一组数据: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{n \uparrow n}, \dots$, 共 200 项, $S(x) = \sum_{i=1}^{200} (x-x_i)^2$ (x_i 是这一组数据的第 i 项), 有以下结论: ①这组数据的极差为 19; ②这组数据的中位数为 14; ③这组数据的平均数为 13.5; ④ $S(13) < S(14)$.

其中正确结论的个数为 _____. (参考公式: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

四、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 0$, 且 $\{a_n + n\}$ 为等比数列, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

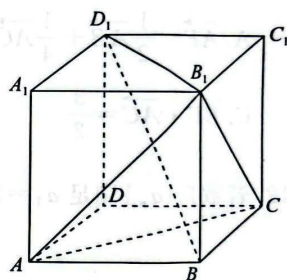
(2) 求满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2024$ 的最大整数 n .

18. (12 分)

在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, $BD_1 \perp$ 平面 AB_1C .

(1) 求 AA_1 ;

(2) 求二面角 $B - B_1C - A$ 的正弦值.

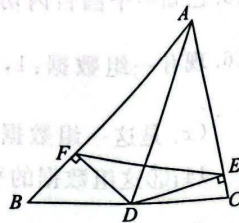


19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, D 为 BC 的中点, $DE \perp AC$ 于点 E , $DF \perp AB$ 于点 F .

(1) 求 $\triangle DEF$ 的面积;

(2) 若 $AD = \frac{\sqrt{129}}{2}$, 求 $\sin \angle ABC + \sin \angle ACB$ 的值.



20. (12分)

某地乒乓球协会在年龄 55 岁~65 岁的乒乓球运动爱好者中,进行一次“快乐乒乓”比赛,3 人一组先进行预赛,选出 1 名参赛人员进入正式比赛. 已知甲、乙、丙在同一组,抽签确定第一轮比赛次序为:甲对乙、甲对丙、乙对丙,先累计获胜 2 场的选手,进入正式比赛. 若前三场比赛甲、乙、丙各胜负一场,则根据抽签确定由甲、乙加赛一场,胜者参加正式比赛.

已知甲胜乙、甲胜丙、乙胜丙的概率分别为 $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$, 各场比赛互不影响且无平局.

(1)求甲进入正式比赛的概率;

(2)若比赛进行了四场结束,记甲获胜的场数为 X ,求 X 的分布列与数学期望.

21. (12分)

已知 A, B 是椭圆 C 上的两点, $A(2, 1)$, A, B 关于原点 O 对称, M 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点, 直线 MA 和 MB 的斜率满足 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)若斜率存在且不经过原点的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点 (P, Q 异于椭圆 C 的上、下顶点), 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 $k_{OP} \cdot k_{OQ}$ 的值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x \ln(a+x) - x$, $f'(0) = 0$.

(1)求实数 a 的值;

(2)证明: $x > \ln 4$ 时, $f(x) > x^2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

