一、选择题

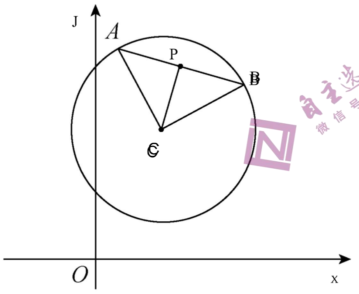
1. C 【解析】因为 $B=\{x|\log_3 x>1\}=\{x|x>3\}$，$A=\{x|2<x<5\}$，所以 $A\cup B=\{x|x>2\}$.

2. B 【解析】由 $\dfrac{\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=2$，得 $\overline{z}+\mathrm{i}=2(z-1-\mathrm{i})$，整理得 $2z-\overline{z}=2+3\mathrm{i}$.设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $2(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=a+3b\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$，所以 $a=2$，$b=1$，所以 $z=2+\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

3. B 【解析】由图象可知，第一天到第六天，实际情况与理想情况重合，$r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=0.6$ 为定值，而实际情况在第六天以后日增长率逐渐降低，且逐渐趋近于 0.

4. C 【解析】将 $f(x)=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位长度后，得到 $g(x)=2\sin(2x+2\varphi)$的图象.由图象可知当 $x=0$ 时，$2x+2\varphi=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 φ 的最小值为 $\dfrac{5\pi}{12}$.

5. B 【解析】如图，圆 C 即 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$，半径 $r=\sqrt{2}$，因为 $CA\perp CB$，所以 $AB=\sqrt{2}r=2$，又 P 是弦 AB 的中点，所以 $CP=\dfrac{1}{2}AB=1$，所以点 P 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.



6. C 【解析】因为 $\sin 2\alpha-m\cos 2\alpha=1$，所以 $-m\cos 2\alpha=1-\sin 2\alpha$，$-m(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$.因为 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$，所以 $-m=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$，当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$-m=-1$，$m=1$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$，所以 $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=-m$；当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$-m=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.综上，$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=-m$.

7. D 【解析】设椭圆 E 的长半轴长、短半轴长、半焦距分别为 a，b，c，由题意知 $a=1$，$b=\sqrt{1-m^2}$，$c=m$，由椭圆 E 上存在点 P 满足 $|OP|=m\geqslant b$，得 $c\geqslant b$，所以 $c^2\geqslant b^2=a^2-c^2$，解得 $\dfrac{c^2}{a^2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.又 $e<1$，所以 E 的离心率的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

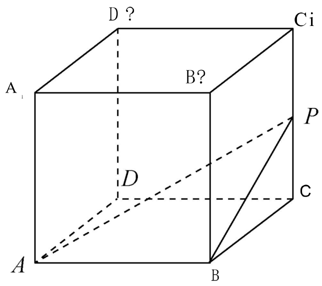
8. D 【解析】因为函数 $f(x-1)$为偶函数，所以函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称，因为函数 $f(x)$在区间 $[-1,+\infty)$上单调递增，所以函数 $f(x)$在区间 $(-\infty,-1]$上单调递减.因为 $f(2)=0$，所以 $f(-4)=0$，由 $f(x)<0$ 可得 $-4<x<2$，由 $f(x)>0$ 可得 $x<-4$ 或 $x>2$.不等式 $xf(x)>0$ 可得 $\begin{cases}x<0,\\ f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\ f(x)>0,\end{cases}$ 解得 $-4<x<0$ 或 $x>2$，故不等式 $xf(x)>0$ 的解集为 $(-4,0)\cup(2,+\infty)$.

9. A 【解析】由题意知 $|OA|=a$，$|FA|=b$，$OA\perp FA$，由对称性得 $AB\perp OF$，所以 $|AB|\cdot c=2ab$.又 $|AB|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$，即 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}ac=2ab$，所以 $\sqrt{2}c=\sqrt{3}b$，$2c^2=3b^2=3c^2-3a^2$，即 $c^2=3a^2$，解得 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.

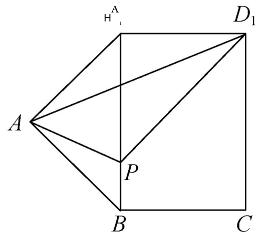
10. A 【解析】设 $ED=x$ cm，因为 $\angle DBE=\angle CBD=\angle BDE$，所以 $BE=ED=x$ cm，在 $\triangle BED$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BED=\dfrac{x^2+x^2-5}{2x\cdot x}=-\dfrac{3}{5}$，解得 $x=\dfrac{5}{4}$.在 $\triangle ABE$ 中，$\cos\angle AEB=\cos(\pi-\angle BED)=\dfrac{3}{5}$，所以 $AE=BE\cos\angle AEB=\dfrac{3}{4}$ cm，$AB=\sqrt{BE^2-AE^2}=1$ cm，所以 $EC'=\dfrac{3}{4}$ cm，$C'D=1$ cm，所以上色部分的面积为 $6\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times 1=\dfrac{9}{4}(\mathrm{cm})^2$.

11. B 【解析】设切点坐标为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}\dfrac{a}{x_0}=2,\\ y_0=2x_0,\\ y_0=a\ln x_0+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{a}{2},\\ y_0=a,\\ a=a\ln\dfrac{a}{2}+2,\end{cases}$ 令 $f(a)=a\ln\dfrac{a}{2}+2-a$，则 $f'(a)=\ln a-\ln 2$，所以当 $0<a<2$ 时，$f'(a)<0$，$f(a)$单调递减；当 $a>2$ 时，$f'(a)>0$，$f(a)$单调递增，所以 $f(a)_{\min}=f(2)=0$，所以方程 $a=a\ln\dfrac{a}{2}+2$ 的根为 $a=2$.

12. C 【解析】对于①，如图①所示，

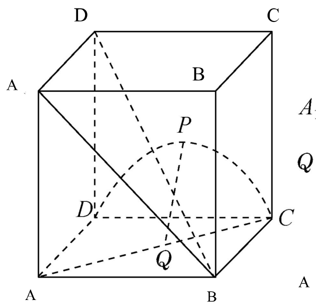


①

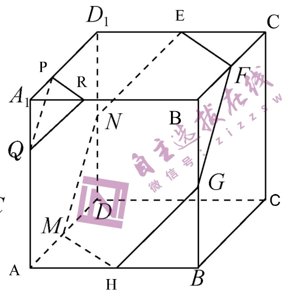


②

由 $AB//CD$，可知$\angle BAP$ 即为异面直线 AP 与 CD 所成的角.连接 BP，则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABP$ 中，$AB=1$，$BP=\sqrt{BC^2+CP^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\tan\angle BAP=\frac{BP}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故正确；对于②，将$\triangle AA_1B$ 与四边形 A_1BCD_1 沿 A_1B 展开到同一个平面上，如图②所示.由图可知，线段 AD_1 的长度即为 $AP+PD_1$ 的最小值.在$\triangle AA_1D_1$ 中，利用余弦定理可得 $AD_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故错误；



③



④

对于③，如图③所示，当 P 为$\overset{\frown}{CD}$中点时，三棱锥 $P\text{-}ABC$体积最大，此时三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球球心是 AC 的中点，半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，其表面积为 2π，故正确；对于④，平面 α 与正方体的每条棱所在直线所成的角都相等，只需与过同一顶点的三条棱所成的角相等即可，如图④所示，$A_1P=A_1R=A_1Q$，则平面 PQR 与正方体过点 A_1 的三条棱所成的角相等.若点 E,F,G,H,M,N 分别为相应棱的中点，可得平面 $EFGHMN$ 平行于平面 PQR，且六边形 $EFGHMN$ 为正六边形.因为正方体的棱长为 1，所以正六边形 $EFGHMN$ 的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得此正六边形的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，为截面最大面积，故正确.

二、填空题

13. 3 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向相反，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $x(2-x)+3=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-1$.当 $x=3$ 时，$\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{b}$，符合题意；当 $x=-1$ 时，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，不符合题意，舍去.

14. 8 【解析】根据题目所给的条件 $x_1+x_2+\cdots+x_{15}=90$，$x_1+x_2+\cdots+x_5=40$，所以 $x_6+x_7+\cdots+x_{15}=50$，所以剩余 10 个数的平均数为 5.$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{15}^2-15\times 6^2=15\times 9$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5{}^2-5\times 8^2=5\times 5$，所以 $x_6{}^2+x_7{}^2+\cdots+x_{15}{}^2=330$，所以这 10 个数的方差为$\frac{330-10\times 5^2}{10}=8$.

15. $\sqrt{3}$ 【解析】设圆台上底面半径为 r，母线长为 l，则其下底面半径为 $2r$，将圆台还原成圆锥，则圆锥的母线长为 $2l$，由圆台的侧面展开图是一个面积为 6π 的半圆环，得$\begin{cases}2\pi\cdot 2r=2l\cdot\pi,\\ \pi(r+2r)l=6\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}r=1,\\ l=2,\end{cases}$所以该圆台的高为 $\sqrt{l^2-(2r-r)^2}=\sqrt{3}$.

16. 1 【解析】对于$\forall x>1$，不等式 $a\ln(ax)<2x\ln x$ 恒成立，所以 $x>1,a>0$，不等式化为 $ax\ln(ax)<x^2\ln x^2$.令 $f(x)=x\ln x$，即 $f(ax)<f(x^2)$在区间$(1,+\infty)$上恒成立，$f'(x)=\ln x+1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，且当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$.要使 $f(ax)<f(x^2)$在区间$(1,+\infty)$上恒成立，只需 $ax<x^2$，即 $a<x$ 在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立，所以 $a\leqslant 1$，即 a 的最大值为 1.

三、解答题

17. 解：(1)2×2 列联表为：

	一周内健步走≥5 万步	一周内健步走<5 万步	总计
45 岁以上(含 45 岁)	90	30	120
45 岁以下	50	30	80
总计	140	60	200

(2 分)

$K^2=\frac{200\times(90\times 30-30\times 50)^2}{120\times 80\times 140\times 60}=\frac{25}{7}>2.706$，(4 分)

所以有 90%的把握认为该市市民一周内健步走的步数与年龄有关. (5 分)

(2)由题意知，从 45 岁以上(含 45 岁)的市民中按分层抽样法抽取一周内健步走的步数不少于 5 万步的市民 6 人，一周内健步走的步数少于 5 万步的市民 2 人. (6 分)

从这 8 人中随机抽取 2 人，则 X 的所有可能取值为 0,1,2. (7 分)

$P(X=0)=\frac{C_6^0C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$，$P(X=1)=\frac{C_6^1C_2^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_2^0}{C_8^2}=\frac{15}{28}$. (10 分)

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{28}$

(11 分)

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{15}{28}=\frac{3}{2}$.

(12 分)

18. **解**：(1)由题意得 $a_1=T_1=a_2^{\frac{1}{2}}$，所以 $a_2=a_1^2=4$.（1 分）

因为当 $n\geqslant 2$ 时，$T_{n-1}=a_n^{\frac{n-1}{2}}$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=\dfrac{a_{n+1}^{\frac{n}{2}}}{a_n^{\frac{n-1}{2}}}$，整理得 $a_n^{\frac{n+1}{2}}=a_{n+1}^{\frac{n}{2}}$，（2 分）

所以 $\dfrac{n+1}{2}\ln a_n=\dfrac{n}{2}\ln a_{n+1}$，即当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{\ln a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\ln a_n}{n}=\dfrac{\ln 4}{2}=\ln 2$，（3 分）

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\ln a_n=\ln 2^n$，即 $a_n=2^n$，（4 分）

又 $a_1=2$ 符合上式，所以 $a_n=2^n$.（5 分）

(2)由(1)知 $a_n=2^n$，

所以 $S_n=2n+(n-1)\times 2^2+(n-2)\times 2^3+\cdots+2\times 2^{n-1}+2^n$ ①，

$2S_n=n\times 2^2+(n-1)\times 2^3+(n-2)\times 2^4+\cdots+2\times 2^n+2^{n+1}$ ②，（7 分）

②－①得 $S_n=-2n+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n+2^{n+1}=-2n+\dfrac{2^2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+2}-2n-4$，

所以 $S_n=2^{n+2}-2n-4$.（12 分）

19. (1)**证明**：如图，取 AD 的中点 O，BC 的中点 M，连接 PO，OM，PM，

由$\triangle PAD$ 为等边三角形，得 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$.（1 分）

由四边形 $ABCD$ 为平行四边形，得 $AB=CD$，$AD/\!/BC$，$AB/\!/OM$，

又因为 $PA=PD$，$\angle PAB=\angle PDC$，

所以$\triangle PAB\cong\triangle PDC$，所以 $PB=PC$，

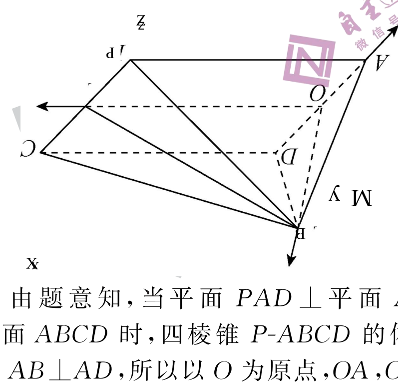
因为 M 为 BC 的中点，所以 $PM\perp BC$.

所以 $PM\perp AD$，（3 分）

因为 $PO\perp AD$，$PO\cap PM=P$，所以 $AD\perp$ 平面 POM，

因为 $OM\subset$平面 POM，所以 $AD\perp OM$，

所以 $AB\perp AD$，即四边形 $ABCD$ 为矩形.（5 分）



(2)**解**：由题意知，当平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，即 $PO\perp$平面 $ABCD$ 时，四棱锥 P-$ABCD$ 的体积最大，由(1)知 $AB\perp AD$，所以以 O 为原点，OA，OM，OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

因为 $PA=AB=2$，则 $O(0,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，（7 分）

设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,-1)$.（9 分）

又 $\overrightarrow{PB}=(1,2,-\sqrt{3})$，设直线 PB 与平面 PDC 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

所以直线 PB 与平面 PDC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.（12 分）

20. (1)**证明**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，

因为 A，B 在 C 上，所以 $\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=\dfrac{\frac{y_2^2}{8}-\frac{y_1^2}{8}}{y_2-y_1}=\dfrac{y_1+y_2}{8}$，（2 分）

同理可得 $\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{y_3+y_4}{8}$，$\dfrac{1}{k_3}=\dfrac{y_1+y_3}{8}$，$\dfrac{1}{k_4}=\dfrac{y_2+y_4}{8}$，

所以 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{k_3}+\dfrac{1}{k_4}$.（5 分）

(2)**解**：由题意，设 $l_1:x=my+2$，$l_2:x=my+4$，l_1，l_2 间的距离为 d，

联立 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8my-16=0$，

则 $\Delta=64(m^2+1)>0$，$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$，（7 分）

联立 $\begin{cases}x=my+4,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8my-32=0$，

则 $\Delta=64(m^2+2)>0$，$y_3+y_4=8m$，$y_3y_4=-32$.（8 分）

因为 $S_{\triangle AMN}=\lambda S_{\triangle ABM}$，所以 $\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{\lambda}{2}|AB|\cdot d$，得 $\lambda=\dfrac{|MN|}{|AB|}$，（9 分）

所以 $\lambda=\dfrac{|y_3-y_4|}{|y_1-y_2|}=\sqrt{\dfrac{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}=\sqrt{\dfrac{64m^2+128}{64m^2+64}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2+1}}$，

因为 $m^2\geqslant 0$，

所以 $\lambda\in(1,\sqrt{2}]$，

故 λ 的取值范围为 $(1,\sqrt{2}]$.（12 分）

21. **解**：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+x-\ln x$，

则 $f'(x)=(x-1)\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}\right)$，当 $x\in(0,+\infty)$时，$\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}>0$ 恒成立，（2 分）

所以当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

即 $f(x)$的单调递减区间是$(0,1)$，单调递增区间是$(1,+\infty)$.（4 分）

(2)由题意，函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-ax+a\ln x=(x-2)\mathrm{e}^x-a(x-\ln x)$，$x>0$.

设 $m(x)=x-\ln x, x>0$,则 $m'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$,

当 $x\in(0,1)$时,$m'(x)<0$,$m(x)$单调递减;

当 $x\in(1,+\infty)$时,$m'(x)>0$,$m(x)$单调递增,

又由 $m(1)=1$,所以 $m(x)\geqslant 1$. (5 分)

令 $f(x)=0$,可得$(x-2)e^x-ax+a\ln x=0$,所以$a=\dfrac{(x-2)e^x}{x-\ln x}$,其中 $x>0$, (6 分)

令 $g(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x-\ln x}$,则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{(x-\ln x)^2}\left(x-\ln x+\dfrac{2}{x}-1\right)$,

令 $h(x)=x-\ln x+\dfrac{2}{x}-1$,则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}(x>0)$,

当 $0<x<2$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减;当 $x>2$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

所以 $h(x)_{\min}=h(2)=2-\ln 2>0$,即当 $x>0$ 时,$h(x)>0$ 恒成立. (8 分)

故当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-e$, (9 分)

又由当 x 趋近于 0 时,$g(x)$趋近于 0,当 x 趋近于 $+\infty$时,$g(x)$趋近于$+\infty$, (11 分)

所以当 $a<-e$ 时,无零点;

当 $a=-e$ 或 $0\leqslant a<e$ 时,有一个零点;

当$-e<a<0$ 时,有两个零点. (12 分)

22. **解**:(1)由题意得$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}=t^2,\\ t^2=1-y^2(y\geqslant 0),\end{cases}$ 所以$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$,

所以 $\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta-3=0$,即 $\rho^2+2\rho^2\sin^2\theta-3=0$.

化简为 $\rho^2(2-\cos 2\theta)-3=0,\theta\in[0,\pi]$.

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2(2-\cos 2\theta)-3=0,\theta\in[0,\pi]$. (3 分)

由 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$,得 $\rho\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)=\sqrt{3}$,

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{1}{2}x-\sqrt{3}=0$,即 $3y+\sqrt{3}x-6=0$,

所以 C_2 的直角坐标方程为 $3y+\sqrt{3}x-6=0$. (5 分)

(2)由$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6},\\ \rho^2(2-\cos 2\theta)-3=0,\end{cases}$ 得 $\rho=\sqrt{2}$,所以 $A\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$, (7 分)

由$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{3},\\ \rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3},\end{cases}$ 得 $\rho=\sqrt{3}$,所以 $B\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$, (9 分)

$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\rho_A\cdot\rho_B\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (10 分)

23. **解**:(1)当 $a=-2$ 时,不等式 $f(x)>3$,即 $x|x-2|+2x>3$,

所以$\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x(x-2)+2x>3\end{cases}$或$\begin{cases}x<2,\\ x(2-x)+2x>3,\end{cases}$ (2 分)

解得 $x\geqslant 2$ 或 $1<x<2$,

所以不等式 $f(x)>3$ 的解集是$(1,+\infty)$. (4 分)

(2)因为 $f(x)<2x+1$ 对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$恒成立,

即 $x|x+a|<1$ 对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$恒成立,

即$|x+a|<\dfrac{1}{x}$,即$-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)<a<-x+\dfrac{1}{x}$,

故只要$-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)<a$ 且 $a<-x+\dfrac{1}{x}$对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$恒成立即可. (6 分)

因为$-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\leqslant-2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=-2,x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,

当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$,即 $x=1$ 时等号成立,所以 $\left[-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]_{\max}=-2$. (8 分)

令 $g(x)=-x+\dfrac{1}{x}$,则 $g(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上单调递减,所以 $g(x)_{\min}=g(2)=-\dfrac{3}{2}$, (9 分)

所以$-2<a<-\dfrac{3}{2}$,即实数 a 的取值范围是$\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$. (10 分)