大联考数学七
参考答案、提示及评分细则

1. D　由 $z(1+i)=i$，得 $z=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i}{2}$，所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限.

2. A　由已知可得 $A=\{x|x^2-x-6>0\}=\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$，$B=\{x|9-x^2\geqslant 0\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $A\cap B=\{x|-3\leqslant x<-2\}$.

3. C　$\sin 226^\circ\cos 196^\circ-\sin 164^\circ\sin 44^\circ=-\sin 46^\circ(-\cos 16^\circ)-\sin 16^\circ\cos 46^\circ=\sin 46^\circ\cos 16^\circ-\cos 46^\circ\sin 16^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

4. C　由题知，$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}c=\sqrt{3}$，$\therefore c=1$，$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，由椭圆的定义知 $|AF_1|+|AF_2|=2a=4$，$\therefore \triangle AF_1F_2$ 的周长为 $4+2=6$.

5. B　若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$；若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，当 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 时，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(0,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$ 成立，但 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

6. C　易知 $y=x+\frac{4}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2},6\right)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，$[2,6)$ 上单调递增. 当 $x=2$ 时，$y=x+\frac{4}{x}=4$；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}+8$；当 $x=6$ 时，$y=x+\frac{4}{x}=6+\frac{2}{3}$；所以 $f(x)\in\left[4,\frac{17}{2}\right]$，则函数 $f(x)$ 的值域为 $\{4,5,6,7,8\}$.

7. D　由 PC 为球 O 的直径可知，$PA\perp AC$，$PB\perp BC$，即 $AC=BC=1$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，即 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为球 O 的半径 $R=1$，所以点 O 到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即顶点 P 到平面 ABC 的距离为 $2d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

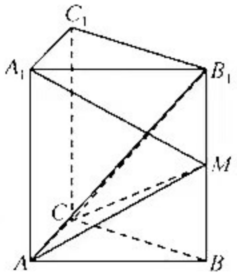
8. C　当 $x>0$ 时，$\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，所以当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，令 $F(x)=xf(x)$，则当 $x>0$ 时，$F'(x)=xf'(x)+f(x)>0$，故 $F(x)=xf(x)$ 在 $x>0$ 时，单调递增，又因为 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数，所以 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数，故 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f(2)=1$，所以 $F(2)=2f(2)=2$，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$ 可变形为 $(2x-1)f(2x-1)<2$，即 $F(2x-1)<F(2)$，因为 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $2x-1<2$，解得 $x<\frac{3}{2}$，故 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$；当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$ 可变形为 $(2x-1)f(2x-1)>2$，即 $F(2x-1)>F(2)$，因为 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $2x-1>2$，解得 $x>\frac{3}{2}$，故无解. 综上不等式 $f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

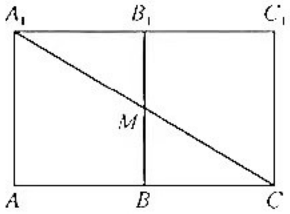
9. AC　二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式通项为 $T_{k+1}=C_6^k\cdot(\sqrt{x})^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^k=C_6^k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot x^{3-\frac{3}{2}k}$. 令 $3-\frac{3}{2}k=0$，可得 $k=2$，故常数项是 $C_6^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$，A 正确；各项的系数和是 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，B 错误；展开式共 7 项，第 4 项二项式系数最大，C 正确；奇数项二项式系数和为 $2^5=32$，D 错误.

10. BCD　因为成绩落在区间 $[90,100]$ 内的人数为 40，所以 $n=\frac{40}{0.04\times 10}=100$，故 A 错误；由 $(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times 10=1$，得 $x=0.030$，故 B 正确；学生成绩平均分为：$0.005\times 10\times 55+0.010\times 10\times 65+0.015\times 10\times 75+0.030\times 10\times 85+0.040\times 10\times 95=84$，故 C 正确；因为 $20000\times(0.04+0.03)\times 10=14000$，，故 D 正确.

1
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

11. ACD　因为 $AA_1\perp AC$,$BA\perp AC$,且 $AA_1\cap BA=A$,所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B,又 $A_1M\subset$ 平面 AA_1B_1B,故 $AC\perp A_1M$,故 A 正确;BB_1 与 CM 的夹角即为异面直线 AA_1,CM 夹角,故异面直线 AA_1,CM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$;B 错误;由图知,平面 AB_1C 将三棱柱截成四棱锥 $B_1-ACC_1A_1$ 和三棱锥 B_1-ABC,一个五面体和一个四面体,C 正确;将平面 AA_1B_1B 和平面 CC_1B_1B 展开,展开为一个平面,如下图,当 A_1,M,C 共线时,A_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{106}$,故 D 正确.





12. ACD　由题可得,抛物线的焦点坐标为 $F(0,2)$,直线 AB:$y=x-2$,与抛物线 $x^2=8y$ 联立得 $y^2-12y+4=0$,所以 $y_1+y_2=12$,所以 $|AB|=y_1+y_2+4=12+4=16$,故 A 正确;设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{8}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{8}\right)$,由 $x^2=8y$,所以 $y'=\frac{x}{4}$,所以 AP:$y-\frac{x_1^2}{8}=\frac{x_1}{4}(x-x_1)$,即为 $y=\frac{x_1x}{4}-\frac{x_1^2}{8}$,同理可得 BP:$y=\frac{x_2x}{4}-\frac{x_2^2}{8}$,由 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8},\\ y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8},\end{cases}$ 解得 $y_P=\frac{x_1x_2}{8}$,由题意可知 AB 斜率存在,设 AB:$y=kx+2$,联立 $\begin{cases}x^2=8y,\\ y=kx+2\end{cases}$ 可知 $x^2-8kx-16=0$,$x_1x_2=-16$,所以 $y_P=-2$,所以点 P 在直线 $y=-2$ 上,故 B 错误;因为 $k_{AP}=\frac{x_1}{4}$,$k_{BP}=\frac{x_2}{4}$,所以 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{x_1x_2}{16}=-1$,所以 $AP\perp BP$,故 C 正确;因为 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)$,即为 $P(4k,-2)$,所以 $|PF|=\sqrt{16k^2+16}=4\sqrt{k^2+1}$,因为 $|AB|=y_1+y_2+4=8k^2+8$,所以 $\frac{|AB|+1}{|PF|}=\frac{8k^2+9}{4\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{4\sqrt{k^2+1}}$,令 $t=\sqrt{k^2+1}\geqslant 1$,则原式 $=2t+\frac{1}{4t}$. 因为函数 $y=2t+\frac{1}{4t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以当 $t=1$,即 $k=0$ 时取到最小值,其最小值为 $\frac{9}{4}$,故 D 正确.

13. $x-y-1=0$　$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,$f(1)=0$,$f'(1)=1$,切线方程为 $y=x-1$,即 $x-y-1=0$.

14. -1　由题知直线过圆心 $(1,1)$,故 $2\times1-1+a=0$,$a=-1$.

15. $\frac{1}{2}$　该人对弈结果的所有可能情形:负负负、负和负、和负负、和和负、负负胜、负和胜、和负胜、和和胜. 故"仅和了 1 局"的概率为 $\frac{1}{2}$.

16. 38　当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$,$a_1=\frac{1}{a_1}$,$a_1^2=1$,∵$a_n>0$,∴$a_1=S_1=1$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$,∴$2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$,$S_n+S_{n-1}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$,∴$S_n^2-S_{n-1}^2=1$,∴$\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项,公差为 1 的等差数列,∴$S_n^2=n$,∵$a_n>0$,∴$S_n>0$,$S_n=\sqrt{n}$,$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2S_n}$,又 $n>1$ 时,$\frac{2}{2S_n}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ 令 $S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{400}}$,$S>2[(\sqrt{401}-\sqrt{400})+(\sqrt{400}-\sqrt{399})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]=2(\sqrt{401}-1)>38$,$S<2[(\sqrt{400}-\sqrt{399})+(\sqrt{399}-\sqrt{398})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]+1=2(\sqrt{400}-1)+1=39$,即 $38<S<39$,从而 $[S]=38$.

17. 解:(1)由已知得 $(a_1+3d-2)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$,$a_1=d^2-3d-1$,…………………………………… 2 分

2
官方微信公众号:zizzsw　　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　　微信客服:zizzs2018

又因为 $a_1=1$，所以 $d^2-3d+1=1$，解得 $d=3$ 或 $d=0$（舍去），…… 4分

所以 $a_n=3n-2$. …… 5分

(2)由(1)得 $b_n=3^{3n-3}$，因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{3(n+1)-3}}{3^{3n-3}}=27$，…… 8分

所以$\{b_n\}$是以 $b_1=1$ 为首项，以 27 为公比的等比数列，所以 $S_n=\frac{1}{26}(27^n-1)$. …… 10分

18. 解：(1)由正弦定理及 $c\sin A=\sqrt{3}a+\sqrt{3}a\cos C$，得 $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos C$. …… 2分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\neq 0$，$\therefore \sin C=\sqrt{3}(1+\cos C)$，…… 3分

$\therefore 2\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …… 4分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore C-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$. …… 6分

(2)由题意可知 $\angle ADB=\frac{5\pi}{6}$. …… 7分

由余弦定理知 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$，…… 8分

故 $12\geqslant 2AD\cdot BD+\sqrt{3}AD\cdot BD$，即 $AD\cdot BD\leqslant\frac{12}{2+\sqrt{3}}=12(2-\sqrt{3})$，当 $AD=BD=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 时，等号成立.

…… 10分

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB\leqslant\frac{1}{2}\times12\times(2-\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}-9$，

即$\triangle ABD$面积的最大值为 $6\sqrt{3}-9$. …… 12分

19. 解：(1)根据频数分布表可知，单株质量落在[27.5,33.5)的概率为 $P=\frac{3+3}{50}=0.12$. …… 3分

(2)样本平均数 $\overline{X}=0.08\times14+0.16\times17+0.20\times20+0.24\times23+0.20\times26+0.06\times29+0.06\times32=22.22$，

这 50 株农作物质量的样本平均数为 22.22. …… 7分

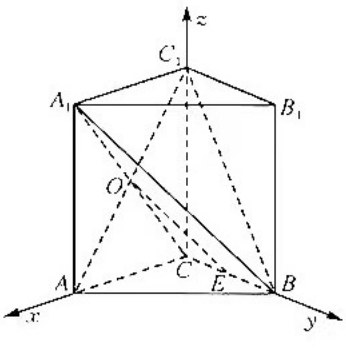
(3)依题意 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，因为 $\mu=\overline{X}=22.22$，$\sigma^2=S^2=22.2516$，$\sigma\approx4.72$，

所以 $P(22.22-4.72<X\leqslant22.22+4.72)=0.6826$，所以 $P(X<26.94)=0.5+\frac{0.6826}{2}=0.8413$. …… 12分

20. 解：(1)证明：由题易知，该三棱柱为直三棱柱，所以侧面 AA_1C_1C 为矩形，可得 O 为 A_1C 的中点，

又由 E 为 BC 的中点，可得 $A_1B/\!/OE$.

因为 $OE\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $OE/\!/$平面 A_1BC_1. …… 4分



(2)由题可以 CA,CB,CC_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

则 $O(1,0,2)$，$E(0,1,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,4)$，

$\overrightarrow{OE}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-2,0,4)$，…… 7分

设平面 ABC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+4z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=2$，$y=2$，$\therefore \boldsymbol{m}=(2,2,1)$，…… 10分

设直线 OE 与平面 ABC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OE},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{6}}{9}$. …… 12分

21. 解：(1)因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，$c^2=a^2+b^2$，

所以 $5a^2=a^2+b^2$，$4a^2=b^2$，$\frac{b}{a}=2$，…… 2分

3
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$. ………………………………………………………… 3 分

(2)存在符合题意的双曲线，

设双曲线的两条渐近线分别为 $l_1: y=2x$，$l_2: y=-2x$，双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$，

依题意得直线 l 的斜率不为零，

因此设直线 l 的方程为 $x=my+t$，$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$，$t>0$， ………………………………………… 5 分

设直线 l 交 x 轴于点 $C(t,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} x=my+t, \\ y=2x, \end{cases}$ 得 $y_1=\frac{2t}{1-2m}$，同理得 $y_2=\frac{-2t}{1+2m}$. ………………………………………… 6 分

由△OAB 的面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|=8$，

得 $\frac{1}{2}t\left|\frac{2t}{1-2m}+\frac{2t}{1+2m}\right|=8$，

即 $t^2=4|1-4m^2|=4(1-4m^2)>0$. (1) ………………………………………………………… 8 分

联立 $\begin{cases} x=my+t, \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1, \end{cases}$ 得 $(4m^2-1)y^2+8mty+4(t^2-a^2)=0$，

因为 $4m^2-1<0$，所以，直线 l 与双曲线只有一个公共点当且仅当 $\Delta=0$，

即 $\Delta=64m^2t^2-16(4m^2-1)(t^2-a^2)=0$，

化简得 $4m^2a^2+t^2-a^2=0$. ………………………………………………………………………… 10 分

将(1)式代入可得 $4m^2a^2+4(1-4m^2)-a^2=0$，

$(a^2-4)(4m^2-1)=0$，

解得 $a^2=4$， ……………………………………………………………………………………… 11 分

因此双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$，

因此，存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线，双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. ……………… 12 分

22. 解：(1) $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)e^x$，$f'(x)=xe^x$， ………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，得 $x>0$；令 $f'(x)<0$，得 $x<0$， ………………………………………………… 2 分

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；单调递减区间为 $(-\infty,0)$. ……………………………… 3 分

(2) $f(x)=(x-a-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+a^2x$，

$f'(x)=(x-a)e^x-ax+a^2=(x-a)(e^x-a)$， ………………………………………………………… 4 分

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，无极值. ……………………………………………… 5 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(a,0)$ 上单调递增，在 $(-\infty,a)$ 上单调递减. ……………………………… 6 分

∴ $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值，∴ $f(a)=-e^a+\frac{1}{2}a^3<-e^a-1$，∴ $a<-\sqrt[3]{2}$. ……………………… 7 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$(正值舍去)，或 $x=\ln a$，$0<a<1$.

$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，在 $(\ln a,0)$ 上单调递减，

∴ $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极大值. ……………………………………………………………………… 9 分

设 $n(a)=f(\ln a)=(\ln a-a-1)a-\frac{1}{2}a\ln^2 a+a^2\ln a=a\ln a(1-\frac{1}{2}\ln a+a)-a^2-a$，

$n'(a)=(1+\ln a)(1-\frac{1}{2}\ln a+a)+a\ln a(1-\frac{1}{2a})-2a-1=-\frac{1}{2}\ln^2 a-2a\ln a-a$.

∵ $0<a<1$，∴ $\ln a<0$，从而有 $n'(a)<0$，

∴ $n(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，∴ $n(a)>n(1)=-2>-e^a-1$，∴ $0<a<1$ 不合题意. ……………… 11 分

当 $a\geq 1$ 时，$\ln a\geq 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上无极值，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt[3]{2})$. ………………………………………………………… 12 分

4 官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。