呼和浩特市2023届高三年级第二次质量普查考试

文科数学参考答案

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	C	A	D	A	C	D	B	D	D	B

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分．共20分．把答案填在题中横线上)

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	①③	6	7或8（答对一个即可） （注：答7和8也给分）

三、解答题(本大题共6个小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．解：

（1）在△ABC中，∵$AC=3$，$AB=5$，$BC=4$，

∴△ABC 为直角三角形，∴$AC\perp BC$，(2分)

又在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面ABC，

∴$CC_1\perp AC$，$CC_1\cap BC=C$，

∴$AC\perp$平面BCC_1，(5分)

∴$AC\perp BC_1$．(6分)

（2）在△ABC中，过C作$CF\perp AB$，F为垂足，

∵平面$ABB_1A_1\perp$平面ABC，且平面$ABB_1A_1\cap$平面$ABC=AB$，∴$CF\perp$平面ABB_1A_1，(8分)

而$CF=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$，(9分)

∵$V_{A_1-B_1CD}=V_{C-A_1DB_1}$，(10分)

而$S_{\triangle DA_1B_1}=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot AA_1=5\times 4\times\frac{1}{2}=10$，

∴$V_{A_1-B_1CD}=\frac{1}{3}\times 10\times\frac{12}{5}=8$．(12分)

18．解：

（1）$\bar{x}=\dfrac{10+20+30+40+50}{5}=30$，

$\bar{y}=\dfrac{62+68+75+81+89}{5}=75$，(1 分)

$5\bar{x}\cdot\bar{y}=5\times30\times75=11250$，(2 分)

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=10^2+20^2+30^2+40^2+50^2=5500$，　(3 分)

则相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2}}=\dfrac{11920-11250}{\sqrt{5500-5\times30^2}\times\sqrt{28575-5\times75^2}}$

$=\dfrac{670}{\sqrt{1000}\times\sqrt{450}}\approx0.999$，(5 分)

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.999，说明 y 与 x 的线性相关程度相当高，从而可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.(6 分)

（2）由（1）得$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{670}{1000}=0.67$，(8 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=75-0.67\times30=54.9$，(9 分)

所以 y 关于 x 的线性回归方程为$\hat{y}=0.67x+54.9$.(10 分)

将$x=130$代入$\hat{y}=0.67x+54.9$，

得$\hat{y}=0.67\times130+54.9=142$，

所以预测该汽车城连续营业 130 天的汽车销售总量为 142 辆.(12 分)

19．解：

（1）由正弦定理$b\sin B+c\sin C=(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b\sin C+a)\sin A$可化为$b^2+c^2=(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b\sin C+a)a$，

即$b^2+c^2-a^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$，(2 分)

则由余弦定理可得$2bc\cos A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$，

所以$\sin C\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C$.(3 分)

又$C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq0$，所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin A$，即$\tan A=\sqrt{3}$.(5 分)

又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$.(6 分)

（2）由正弦定理可得：$\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}=2$，解得 $a=\sqrt{3}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，(8 分)

$\because b<a$，$\therefore B$ 为锐角，$\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$.(9 分)

在 $\triangle ACB$ 中，$C=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}$，

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，$\therefore \angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，(10 分)

$\therefore \angle ADC=\pi-\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{12}$，(11 分)

$\therefore AD=AC=\sqrt{2}$. (12 分)

20．解：

（1）在椭圆中，$c^2=a^2-b^2=2$，所以 $c=\sqrt{2}$，……(2 分)

由 $\dfrac{p}{2}=\sqrt{2}$，得 $p=2\sqrt{2}$.……(4 分)

（2）设直线 l：$x=my+\dfrac{p}{2}$，代入抛物线方程得 $y^2-2mpy-p^2=0$.……(5 分)

设 AB 的中点 $G(x_0,y_0)$，则 $y_0=mp$，$x_0=m^2p+\dfrac{p}{2}$，

由 $k_{OG}\cdot k_{MN}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 得 $\dfrac{mp}{m^2p+\dfrac{p}{2}}\cdot(-m)=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$，解得 $m^2=\dfrac{1}{2}$，……(7 分)

由点 G 在椭圆内，得 $\dfrac{(m^2p+\dfrac{p}{2})^2}{4}+\dfrac{(mp)^2}{2}<1$，解得 $p^2<2$，……(9 分)

因为 $p\in N_+$，所以 p 值是 1，……(10 分)

$\triangle OAB$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{p}{2}|y_A-y_B|=\dfrac{p}{4}\sqrt{4p^2m^2+4p^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ …… (12 分)

21．解：

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x^2-e, f'(x)=e^x+2x$，

故 $f'(0)=e^0+2\times0=1, f(0)=1-e$，(2 分)

故在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1-e$；(4 分)

（2）解：由题意知 $f'(x)=e^x+2ax=0$ 有且只有一个根且 $f'(x)$ 有正有负，

构建 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x+2a$.(5 分)

①当$a>0$时，$g'(x)>0$当$x\in\mathbf{R}$时恒成立，$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

因为$g\left(-\frac{1}{2a}\right)=e^{-\frac{1}{2a}}-1<0, g(0)=1>0$，

所以$g(x)$有一个零点，即为$f(x)$的一个极值点；(7 分)

②当$a=0$时，$g(x)=f'(x)=e^x>0$在$\mathbf{R}$上恒成立，即$f(x)$无极值点；(8 分)

③当$a<0$时，当$x<\ln(-2a), g'(x)<0$；当$x>\ln(-2a), g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(-\infty,\ln(-2a))$单调递减，在$(\ln(-2a),+\infty)$上单调递增，

故$g(x)_{\min}=g(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)$，(9 分)

若$g(x)_{\min}<0$，则$-1+\ln(-2a)>0$，即$a<-\frac{e}{2}$.

因为$a<0$，所以当$x<0$时，$g(x)>0$，

当$x>0$时，$g(2\ln(-2a))=4a^2+4a\ln(-2a)=-4a[-a-\ln(-2a)]$，

令$-a=t$，则$s(t)=t-\ln(2t), t>\frac{e}{2}$，故$s'(t)=\frac{t-1}{t}>0$，

故$s(t)$在$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$上为增函数.

故$s(t)>s\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{e}{2}-\ln\frac{e}{2}=\frac{e}{2}-1+\ln 2>0$，

故$-2a[-2a-\ln(-2a)]>0$，

故当$a<-\frac{e}{2}$时，$g(x)$有两个零点，此时$f(x)$有两个极值点，

当$g(\ln(-2a))\geq 0$时，$g(x)\geq 0$当$x\in\mathbf{R}$时恒成立，即$f(x)$无极值点；

综上所述：$a>0$.(12 分)

22．**解：**

（1）将曲线C_1的参数方程化为普通方程，得$(x-3)^2+y^2=8$.

曲线C_2的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta-6\cos\theta=0$，有$\rho^2\sin^2\theta-6\rho\cos\theta=0$，

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$得曲线$C_2$的直角坐标方程为$y^2=6x$.(5 分)

（2）将$\begin{cases}x=3+\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）代入曲线$C_2$的方程得，$(\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2=6(3+\frac{1}{2}t)$，

即$t^2-4t-24=0$. 解得两根为$t_1=2+2\sqrt{7}$，$t_2=2-2\sqrt{7}$，

由 t 的几何意义得，$|PQ|=|t_1|+|t_2|=t_1-t_2=4\sqrt{7}$.

同理将 $\begin{cases} x=3+\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）代入曲线 C_1 的方程得，$t^2=8$，

解得两根为 $t_3=2\sqrt{2}$，$t_4=-2\sqrt{2}$. $\therefore |MN|=|t_3|+|t_4|=t_3-t_4=4\sqrt{2}$.

故 $|PM|+|NQ|=|PQ|-|MN|=4\sqrt{7}-4\sqrt{2}$. (10 分)

23．**解：**

（1）由题意知 $f(x)=\begin{cases} -4x.x<-\dfrac{1}{4}, \\ 1,-\dfrac{1}{4}\leqslant x<\dfrac{1}{4}, \\ 4x,x\geqslant\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

令 $f(x)=3$，得 $x=-\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{3}{4}$，

结合图象可知 $f(x)<3$ 的解集为 $\{x|-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{3}{4}\}$ (5 分)

（2）由题意可知 $\dfrac{2a}{a+2}+\dfrac{b}{b+1}=1$，$\therefore 2-\dfrac{4}{a+2}+1-\dfrac{1}{b+1}=1$，

$\therefore \dfrac{4}{a+2}+\dfrac{1}{b+1}=2$

令 $m=a+2$，$n=b+1$，则 $\dfrac{4}{m}+\dfrac{1}{n}=2$，

$a+b=m+n-3=\dfrac{1}{2}(m+n)(\dfrac{4}{m}+\dfrac{1}{n})-3=\dfrac{1}{2}(5+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{n})-3\geqslant\dfrac{1}{2}(5+4)-3=\dfrac{3}{2}$，

当且仅当 $m=2n=3$，即 $a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立. (10 分)