

哈尔滨师大附中
东北师大附中
辽宁省实验中学

2020 年高三第一次联合模拟考试

理 科 数 学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

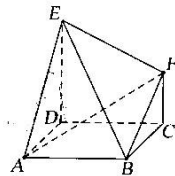
第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x | \frac{1}{x} > 1\}$, 则 $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) =$
 - A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
 - B. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
 - C. $[3, +\infty)$
 - D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
2. 已知复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, $\frac{z}{i+1}$ 是实数, 那么复数 z 的实部与虚部满足的关系式为
 - A. $a + b = 0$
 - B. $a - b = 0$
 - C. $a - 2b = 0$
 - D. $a + 2b = 0$
3. 已知 α, β 是两个不同的平面, 直线 $m \subset \alpha$, 下列命题中正确的是
 - A. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel \beta$
 - B. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \beta$
 - C. 若 $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 - D. 若 $m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
4. 大约在 20 世纪 30 年代, 世界上许多国家都流传着这样一个题目: 任取一个正整数 n , 如果它是偶数, 则除以 2; 如果它是奇数, 则将它乘以 3 加 1, 这样反复运算, 最后结果必然是 1. 这个题目在东方被称为“角谷猜想”, 世界一流的大数学家都被其卷入其中, 用尽了各种方法, 甚至动用了最先进的电子计算机, 验算到对 700 亿以内的自然数上述结论均为正确的, 但却给不出一一般性的证明. 例如取 $n = 13$, 则要想算出结果 1, 共需要经过的运算步数是
 - A. 9
 - B. 10
 - C. 11
 - D. 12
5. 已知 $a = \ln 3, b = \log_3 e, c = \log_e e$ (注: e 为自然对数的底数), 则下列关系正确的是
 - A. $b < a < c$
 - B. $c < b < a$
 - C. $b < c < a$
 - D. $a < b < c$
6. 已知在边长为 3 的等边 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{DC}$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{AC} =$
 - A. 6
 - B. 9
 - C. 12
 - D. -6

2020年东北三省三校高三第一次联合模拟考试 理科试卷

7. 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FC \perp$ 平面 $ABCD$, $ED = 2FC = 2$, 则四面体 $A-BEF$ 的体积为
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$
C. 1 D. $\frac{4}{3}$



8. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后, 其图象关于 y 轴对称, 则 $\varphi =$
- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(c, 0)$, 上顶点为 $A(0, b)$, 直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 上存在一点 P 满足 $(\vec{FP} + \vec{FA}) \cdot \vec{AP} = 0$, 则椭圆的离心率取值范围为
- A. $[\frac{1}{2}, 1)$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

10. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-2|, & x \in [1, 3) \\ 2f(\frac{x-1}{2}), & x \in [3, +\infty) \end{cases}$, 则函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ \ln(2-x), & x < 1 \end{cases}$ 的图象在区间 $[-5, 7]$ 上所有交点的横坐标之和为
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 2$, 将这个数列中的项摆成如图所示的数阵, 记 b_n 为数阵从左至右的 n 列, 从上到下的 n 行共 n^2 个数的和, 则数列 $\{\frac{b_n}{n}\}$ 的前 2020 项和为
- | | | | | |
|----------|-----------|-----------|----------|------------|
| a_1 | a_2 | a_3 | \cdots | a_n |
| a_2 | a_3 | a_4 | \cdots | a_{n+1} |
| a_3 | a_4 | a_5 | \cdots | a_{n+2} |
| \cdots | \cdots | \cdots | \cdots | \cdots |
| a_n | a_{n+1} | a_{n+2} | \cdots | a_{2n-1} |
- A. $\frac{1011}{2020}$ B. $\frac{2019}{2020}$
C. $\frac{2020}{2021}$ D. $\frac{1010}{2021}$

12. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上, 且 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, $\angle F_1PF_2$ 的平分线交 x 轴于点 A , 则 $|PA| =$
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填写在答题纸相应位置上.

13. 近年来, 新能源汽车技术不断推陈出新, 新产品不断涌现, 在汽车市场上影响力不断增大. 动力电池技术作为新能源汽车的核心技术, 它的不断成熟也是推动新能源汽车发展的主要动力. 假定现在市售的某款新能源汽车上, 车载动力电池充放电循环次数达到 2000 次的概率为 85%, 充放电循环次数达到 2500 次的概率为 35%. 若某用户的自用新能源汽车已经经过了 2000 次充电, 那么他的车能够充电 2500 次的概率为 _____.

2020年东北三省三校高三第一次联合模拟考试 理数试卷

14. 已知函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ 在 $[0, 1]$ 上不单调, 则实数 a 的取值范围为_____.
15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n(2S_n - 1) = 2S_n^2 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_n =$ _____.
16. 已知函数 $f(x) = (x^2 - a)^2 - 3|x^2 - 1| - b$, 当_____时(从①②③④中选出一个作为条件), 函数有_____. (从⑤⑥⑦⑧中选出相应的作为结论, 只填出一组即可)
- ① $a \leq -\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$ ③ $a = 1, -2 < b < 0$ ④ $a = 1, -\frac{9}{4} < b < -2$ 或 $b = 0$
- ⑤ 4 个极小值点 ⑥ 1 个极小值点 ⑦ 6 个零点 ⑧ 4 个零点

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2b \cos C = 2a + c$.

(I) 求 B ;

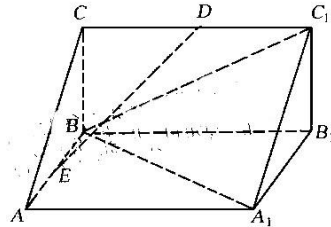
(II) 若 $a = 2, D$ 为 AC 的中点, 且 $BD = \sqrt{3}$, 求 c .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC, AB = 2, BC = 1, BB_1 = 3, D$ 是 CC_1 的中点, E 是 AB 的中点.

(I) 证明: $DE \parallel$ 平面 C_1BA_1 ;

(II) F 是线段 CC_1 上一点, 且直线 AF 与平面 ABA_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 求二面角 $F - BA_1 - A$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

为了研究 55 岁左右的中国人睡眠质量与心脑血管病是否有关联, 某机构在适龄人群中随机抽取了 100 万个样本, 调查了他们每周是否至少三个晚上出现了三种失眠症状, A 症状: 入睡困难; B 症状: 醒得太早; C 症状: 不能深度入睡或做梦, 得到的调查数据如下:

数据 1: 出现 A 症状人数为 8.5 万, 出现 B 症状人数为 9.3 万, 出现 C 症状人数为 6.5 万, 其中含 AB 症状同时出现 1.8 万人, AC 症状同时出现 1 万人, BC 症状同时出现 2 万人, ABC 症状同时出现 0.5 万人;

数据 2: 同时有失眠症状和患心脑血管病的人数为 5 万人, 没有失眠症状且无心脑血管病的人数为 73 万人.

(I) 依据上述数据试分析 55 岁左右的中国人患有失眠症的比例大约多少?

(II) 根据以上数据完成如下列联表, 并根据所填列联表判断能否有 95% 的把握说明失眠与心脑血管病存在“强关联”?

	失眠	不失眠	合计
患心脑血管疾病			
不患心脑血管疾病			
合计			

2020年东北三省三校高三第一次联合模拟考试 理数试卷

参考数据如下：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706
$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. (本小题满分 12 分)

已知以动点 P 为圆心的 $\odot P$ 与直线 $l: x = -\frac{1}{2}$ 相切, 与定圆 $\odot F: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 相外切.

(I) 求动圆圆心 P 的轨迹方程 C ;

(II) 过曲线 C 上位于 x 轴两侧的点 M, N (MN 不与 x 轴垂直) 分别作直线 l 的垂线, 垂足记为 M_1, N_1 , 直线 l 交 x 轴于点 A , 记 $\triangle AMM_1, \triangle AMN, \triangle ANN_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 且 $S_2^2 = 4S_1S_3$, 证明: 直线 MN 过定点.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}ax^2 - x (a \in R)$.

(I) 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $f'(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑. 本题满分 10 分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 参数方程为 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (其中 θ 为参数) 的曲线经过伸缩变换 $\varphi: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$, 得

到曲线 C . 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 D 的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

(I) 求曲线 C 的普通方程及曲线 D 的直角坐标方程;

(II) 设 M, N 分别为曲线 C 和曲线 D 上的动点, 求 $|MN|$ 的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

设函数 $f(x) = |x+2| + |x-3|$.

(I) 求不等式 $f(x) > 9$ 的解集;

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq |3m-2|$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

福利：

- 1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料
- 2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题