2020～2021学年度下学年河南省高三开学检测

数学（理科）

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若$(1-3i)z=2+i$，则$|z|=$

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2．设集合$A=\{x|-1<2-x<3\}$，$B=\{x|x^2-5x+4>0\}$，则$A\cap(\complement_R B)=$

A．$[1,4)$　　B．$(1,4)$　　C．$(-1,3)$　　D．$[1,3)$

3．已知$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则$\cos(\frac{7\pi}{6}-\alpha)=$

A．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{6}$　　C．$\frac{\sqrt{34}}{6}$　　D．$-\frac{\sqrt{34}}{6}$

4．某地积极响应党中央的号召，开展扶贫活动，扶贫第x年该地区贫困户年人均收入y的部分数据如下表：

年份	2015	2016	2017	2018	2019
年份编号x	1	2	3	4	5
年人均收入y(万元)	0.5	0.6	1	1.4	m

根据表中所给数据，求得y与x的线性回归方程为$\hat{y}=0.32x+0.08$，则2019年该地区贫困户的实际年人均收入为

A．1.65万元　　B．1.68万元　　C．1.7万元　　D．1.8万元

5．已知$a=\log_{0.4}0.3$，$b=\log_{0.7}0.4$，$c=0.3^{0.7}$，则

A．$c<b<a$　　B．$c<a<b$

C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

6．已知直线l经过双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个虚轴端点以及一个焦点，且点$O$（$O$为坐标原点）到直线$l$的距离为$\frac{c}{2}$，则双曲线$C$的离心率为

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

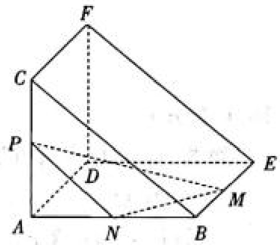
7. 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$AA_1\perp$平面 $ABCD$，点 E 是侧面 CDD_1C_1 的中心，$DD_1=2AB$，则异面直线 AE 与 BD_1 所成角的余弦值是

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}}{9}$　　C. $\frac{5\sqrt{6}}{18}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. "六艺"源于中国周朝的贵族教育体系，具体包括"礼、乐、射、御、书、数". 为弘扬中国传统文化，某校在周末学生业余兴趣活动中开展了"六艺"知识竞赛活动，现有六位同学，每位同学准备了"六艺"中的一类相关知识，且各不相同，每位同学随机从这六类知识中抽取不同的一项参加回答，则恰有三位同学抽到自己准备的知识的概率为

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{2}{15}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{4}$

9. 已知三棱柱 $ABC-DEF$，DA，DE，DF 两两互相垂直，且 $DA=DE=DF$，M，N 分别是 BE，AB 边的中点，P 是线段 CA 上任意一点. 过三点 P，M，N 的平面与三棱柱 $ABC-DEF$ 的截面有以下几种可能：①三角形；②四边形；③五边形；④六边形. 其中正确的是



A. ①②

B. ③④

C. ①②③

D. ②③④

10. $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c\cos A=(3b-a)\cos C$. 若$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{2}$，则 c 的最小值是

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 12

11. 已知函数 $f(x)=4\cos(2\omega x+\frac{\pi}{6})-2(\omega>0)$在$[0,\pi]$内有且仅有两个零点，则 ω 的取值范围是

A. $(\frac{3}{2},\frac{13}{6}]$　　B. $[\frac{3}{2},\frac{13}{6})$　　C. $(\frac{3}{4},\frac{13}{12}]$　　D. $[\frac{3}{4},\frac{13}{12})$

12. 已知函数 $f(x)=e^x+ax$，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，则 a 的取值范围为

A. $[-e,+\infty)$　　B. $(-\infty,-e]$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. $(x^2-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中，第 5 项为常数项，则 $n=$____▲____.

14. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为____▲____.

15. 若函数 $f(x)=\cos x-\frac{9}{2\pi^2}x^2$ 的定义域为$[-\pi,\pi]$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为____▲____.

16. 已知直线 $l:2x+y-2=0$ 过抛物线 $C:y^2=mx$ 的焦点 F，且与 y 轴交于点 P，M 是抛物线 C 上一点，O 为坐标原点，FM 的中点 Q 满足$\overrightarrow{PQ}=\lambda(\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|}+\frac{\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PO}|})$，则点 M 的坐标为____▲____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)

已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且 $2a_2$ 是 a_3 和 $4a_1$ 的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

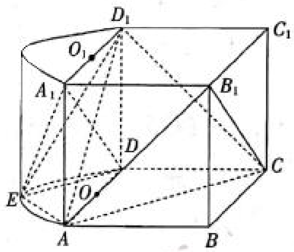
(2)数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，$b_7=13$，且 $b_{n+2}+b_n=2b_{n+1}$，求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A_1D_1DA 为轴截面有一半圆柱 OO_1，点 E 为圆弧 AD 的中点.

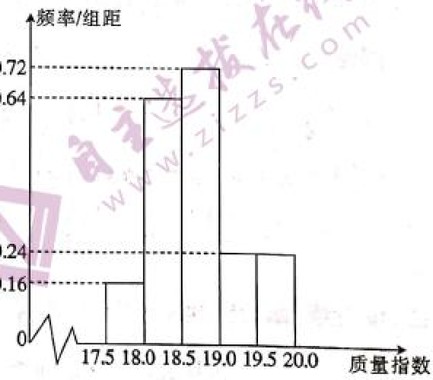
(1)证明：平面 A_1ED∥平面 AB_1C.

(2)求二面角 $E-AD_1-C$ 的正弦值.



19.(12 分)

科技是国家强盛之基，创新是民族进步之魂. 当今世界，科学技术日益渗透到经济发展、社会发展和人类生活的方方面面，成为生产力中最活跃的因素，科学技术的重要性也逐渐突显出来. 某企业为提高产品质量，引进了一套先进的生产线设备. 为了解该生产线输出的产品质量情况，从中随机抽取 200 件产品，测量某项质量指数，根据所得数据分成[17.5,18.0)，[18.0,18.5)，[18.5,19.0)，[19.0,19.5)，[19.5,20.0]这 5 组，得到频率分布直方图如图所示. 若该项质量指数在[18.0,19.5)内，则称该产品为优等品，其他的称为非优等品.



(1)估计该生产线生产的产品该项质量指数的中位数(结果精确到 0.01)；

(2)按优等品和非优等品用分层抽样的方法从这 200 件产品中抽取 10 件产品，再从这 10 件产品中随机抽取 3 件，记优等品的数量为 X，求 X 的分布列与期望.

20.（12分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，且椭圆 C 上的点到右焦点 F 的距离最长为3.

(1)求椭圆 C 的标准方程.

(2)过点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，AB 的中垂线 l_1 与 x 轴交于点 G，试问 $\frac{|AB|}{|FG|}$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由.

21.（12分）

已知函数 $f(x)=x\sin x+2\cos x+x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)证明：$f'(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},2\pi)$ 内存在唯一零点.

(2)当 $x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$ 时，$f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共10分.请考生从第22,23两题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一个题目计分.

22.[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），已知点 $Q(6,0)$，点 P 是曲线 C_1 上任意一点，点 M 为 PQ 的中点，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求点 M 的轨迹 C_2 的极坐标方程；

(2)若直线 $l:y=kx$ 与曲线 C_2 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AB}$，求 k 的值.

23.[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知函数 $f(x)=|x+2|+3|x-a|(a>0)$.

(1)求 $f(x)$ 的最小值；

(2)当 $a=1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)-10$ 的图象与 x 轴围成封闭图形的面积.

2020～2021 学年度下学年河南省高三开学检测
数学参考答案(理科)

1. A　设 $z=a+bi$，则 $(1-3i)z=a+3b+(b-3a)i=2+i$，可得 $a+3b=2$，$b-3a=1$，所以 $a=-\frac{1}{10}$，$b=\frac{7}{10}$，则 $z=-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

另解：对 $(1-3i)z=2+i$ 两边同时取模可得 $|1-3i||z|=|2+i|$，其中 $|1-3i|=\sqrt{10}$，$|2+i|=\sqrt{5}$，则 $|z|=\frac{|2+i|}{|1-3i|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. D　因为 $A=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|1\leqslant x<3\}$.

3. B　因为 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

故 $\cos(\frac{7\pi}{6}-\alpha)=\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha-\frac{\pi}{3})=-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

4. C　由 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，代入 $\hat{y}=0.32x+0.08$，可得 $\bar{y}=1.04$，即 $\frac{0.5+0.6+1+1.4+m}{5}=1.04$，

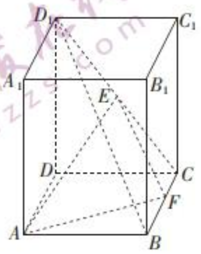
故 $m=1.7$.

5. B　$1=\log_{0.4}0.4<a=\log_{0.4}0.3<\log_{0.4}0.16=2$，$b=\log_{0.7}0.4>\log_{0.7}0.49=2$，$c=0.3^{0.7}<0.3^{0}=1$，

故 $c<a<b$.

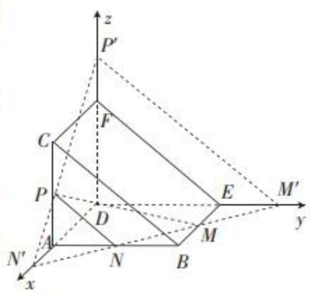
6. D　根据对称性，不妨设直线 l 经过双曲线的虚轴上端点 $(0,b)$ 以及右焦点 $(c,0)$，则直线 l 的方程为 $bx+cy=bc$. 点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{c}{2}$，化简可得 $c^2=3b^2=3(c^2-a^2)$，故 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. C　如图，取 BC 的中点 F，连接 AF，EF，CD_1，则 E 为 CD_1 的中点. 因为 F 为 BC 的中点，所以 $EF/\!/BD_1$，则 $\angle AEF$ 为异面直线 AE 与 BD_1 所成的角. 设 $AB=2$，则 $AF=\sqrt{5}$，$EF=\frac{1}{2}BD_1=\sqrt{6}$，$AE=3$，从而 $\cos\angle AEF=\frac{9+6-5}{2\times3\times\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{18}$.



8. A　6 位同学抽取题目的方式有 A_6^6 种，恰有三位同学抽到自己准备的知识，说明还有三位没有抽到自己准备的知识. 不妨设 A，B，C 三位同学没有抽到自己准备的知识，利用列举法可知此时有两种方式. 故可知恰有三位同学抽到自己准备的知识的方式有 $C_6^3\times2$ 种. 所得概率为 $\frac{C_6^3\times2}{A_6^6}=\frac{1}{18}$.

9. C　如图，以点 D 为原点，DA 所在直线为 x 轴，DE 所在直线为 y 轴，DF 所在直线为 z 轴. 延长 MN 分别交 x 轴，y 轴于点 N'，M'. 连接 $N'P$ 交 z 轴于点 P'，则过 P，M，N 三点的平面与过点 N'，M'，P' 的平面相同. 当点 P 与点 A 重合时，截面为四边形；当 $0<PA<\frac{1}{2}AC$ 时，截面为五边形；$\frac{1}{2}AC\leqslant PA<AC$ 时，截面为四边形；当点 P 与点 C 重合时，截面为三角形. 而该三棱柱只有五个面，截面与每个面相交最多产生五条交线，故截面形状最多为五边形，即不可能为六边形.



10. B　因为 $c\cos A=(3b-a)\cos C$，所以 $\sin C\cos A=3\sin B\cos C-\sin A\cos C$，即 $\sin C\cos A+\sin A\cos C=$

$3\sin B\cos C$. 因为 $\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，所以 $\sin B=3\sin B\cos C$，所以 $\cos C=\frac{1}{3}$，则 $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为△$ABC$ 的面积为 $3\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}ab=3\sqrt{2}$，则 $ab=9$. 由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-\frac{2}{3}ab\geqslant\frac{4}{3}ab=12$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），则 $c\geqslant 2\sqrt{3}$.

11. D　因为 $0\leqslant x\leqslant\pi$，所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2\omega x+\frac{\pi}{6}<2\omega\pi+\frac{\pi}{6}$. 因为函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内有且仅有两个零点，所以 $\begin{cases}2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{5\pi}{3},\\2\omega\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac{3}{4}\leqslant\omega<\frac{13}{12}$.

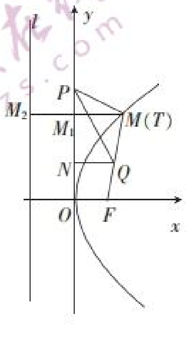
12. A　由题意可得 $f'(x)=e^x+a$. 因为 $x\geqslant 0$，所以 $f'(x)\geqslant a+1$. 当 $a\geqslant -1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $f(x)_{\min}=f(0)=1>0$ 恒成立，故 $a\geqslant -1$ 符合题意. 当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(-a)$. 因为 $f'(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln(-a))$ 上单调递减，在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)_{\min}=f(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)$. 因为 $f(x)\geqslant 0$，所以 $-a+a\ln(-a)\geqslant 0$，即 $\ln(-a)\leqslant 1$，解得 $-e\leqslant a<-1$. 综上，a 的取值范围为 $[-e,+\infty)$.

13. 6　通项公式 $T_{r+1}=C_n^r(x^2)^{n-r}\cdot(-2x^{-1})^r=(-2)^rC_n^rx^{2n-3r}$，因为 $T_5=2^4C_n^4x^{2n-12}$ 为常数项，所以 $n=6$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$　因为 $f(x)$ 是偶函数，在 $[0,\pi]$ 上单调递减，且 $f(\frac{\pi}{3})=0$，所以 $f(x)>0$ 等价于 $f(x)>f(\frac{\pi}{3})$，故不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$.

16. (1,2)　由题意知 $F(1,0)$，$P(0,2)$. 因为 $\overrightarrow{PQ}=\lambda(\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|}+\frac{\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PO}|})$，所以 PQ 平分 $\angle OPM$. 作 $QN\perp y$ 轴于点 N，作 $MM_1\perp y$ 轴于点 M_1，交 C 的准线 l 于点 M_2，则 $2|QN|=|MM_1|+|OF|=|MM_2|=|MF|$，故 $|QN|=\frac{1}{2}|MF|=|QM|$. 过点 Q 作 $QT\perp MP$ 于点 T，由 PQ 是 $\angle OPM$ 的角平分线，则 $|QN|=|QT|=|QM|$，由垂线段的唯一性知 T，M 重合，可得 $\angle PMF=90°$，则 M 在以线段 PF 为直径的圆上. 设 $M(x_0,y_0)$，则 $(x_0-\frac{1}{2})^2+(y_0-1)^2=\frac{5}{4}$，将 $x_0=\frac{y_0^2}{4}$ 代入得 $y_0(y_0^3+12y_0-32)=0$，易知 $y_0\neq 0$，所以 $y_0^3+12y_0-32=(y_0-2)(y_0^2+2y_0+16)=0$，得 $y_0=2$，所以 $x_0=1$. 故 M 的坐标为 (1,2).



17. 解：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $a_1=1$，所以 $a_2=a_1q=q$，$a_3=a_1q^2=q^2$. ………………………… 2 分

因为 $2a_2$ 是 a_3 和 $4a_1$ 的等差中项，

所以 $4a_2=a_3+4a_1$，即 $4q=q^2+4$，解得 $q=2$，………………………… 5 分

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. ………………………… 6 分

(2) 因为 $b_{n+2}+b_n=2b_{n+1}$，所以 $\{b_n\}$ 为等差数列. ………………………… 7 分

因为 $b_1=1$，$b_7=13$，所以公差 $d=\frac{13-1}{7-1}=2$. ………………………… 9 分

所以 $b_n=2n-1$. …………………………

故 $T_n=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{(1+2n-1)n}{2}=2^n+n^2-1$. ………………………… 12分

18.(1)证明:因为点 E 为圆弧 AD 的中点,

所以$\triangle AED$为等腰直角三角形,$\angle ADE=45°$. ………………………… 1分

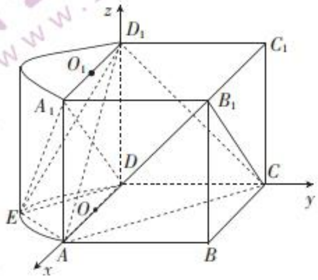
因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,

所以$\angle DAC=45°$,所以 $AC/\!/ED$. ………………………… 3分

因为 $B_1C/\!/A_1D$, $AC\cap B_1C=C$, $ED\cap A_1D=D$,

所以平面 $A_1ED/\!/$平面 AB_1C. ………………………… 5分

(2)解:不妨设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为4.



如图,以 D 为原点,分别以$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD_1}$的方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $E(2,-2,0)$,$A(4,0,0)$,$D_1(0,0,4)$,$C(0,4,0)$, ………………………… 7分

所以$\overrightarrow{EA}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{ED_1}=(-2,2,4)$.

设平面 EAD_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{EA}\cdot\boldsymbol{m}=2x+2y=0,\\ \overrightarrow{ED_1}\cdot\boldsymbol{m}=-2x+2y+4z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$. ……… 9分

易知平面 AD_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. ………………………… 10分

因为 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{1}{3}$,所以二面角 $E-AD_1-C$ 的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………… 12分

19.解:(1)因为$(0.16+0.64)\times0.5=0.4<0.5$,$(0.16+0.64+0.72)\times0.5=0.76>0.5$,

所以该生产线生产的产品该项质量指数的中位数在$[18.5,19.0)$内. ………………………… 2分

设其中位数为 m,则$(m-18.5)\times0.72+0.4=0.5$. ………………………… 3分

解得 $m\approx18.64$,即该生产线生产的产品该项质量指数的中位数约为18.64. ………………………… 5分

(2)由题意可知样本中非优等品有 $200\times(0.16+0.24)\times0.5=40$ 件,优等品有 $200-40=160$ 件,

则优等品应抽取$\frac{160}{200}\times10=8$件,非优等品应抽取$\frac{40}{200}\times10=2$件. ………………………… 6分

故 X 的取值可能是1,2,3.

$P(X=1)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$,$P(X=3)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$, ………………………… 9分

则 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

………………………… 10分

故 $EX=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=\frac{12}{5}$. ………………………… 12分

20.解:(1)由题意可设椭圆的半焦距为 c,

则$\begin{cases}a+c=3,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………………… 1分

解得 $a=2$,$b=\sqrt{3}$. ………………………… 3分

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4分

(2)当直线 l 的斜率不为0时,设直线 l 的方程为 $x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB 的中点为 $H(x_0,y_0)$.

联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

由题意可知 $m\neq0$,则 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$, ………………………… 5分

从而$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$. ………………………… 6分

因为 H 为 AB 的中点,所以 $y_0=\frac{-3m}{3m^2+4}$,$x_0=my_0+1=\frac{4}{3m^2+4}$,即 $H(\frac{4}{3m^2+4},-\frac{3m}{3m^2+4})$. ………… 7分

直线 l_1 的方程可设为 $x=-\frac{1}{m}(y+\frac{3m}{3m^2+4})+\frac{4}{3m^2+4}$,

令 $y=0$,得 $x=\frac{1}{3m^2+4}$,则$|FG|=|1-\frac{1}{3m^2+4}|=\frac{3(m^2+1)}{3m^2+4}$. ………………………… 9分

故$\frac{|AB|}{|FG|}=\frac{\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}}{\frac{3(m^2+1)}{3m^2+4}}=4$. ………………………………………… 10分

当直线 l 的斜率为0时,$|AB|=2a=4$,$|FG|=c=1$,则$\frac{|AB|}{|FG|}=4$. ………………………… 11分

综上,$\frac{|AB|}{|FG|}$为定值,且定值为4. ………………………………………… 12分

21.(1)证明:因为 $f(x)=x\sin x+2\cos x+x$,所以 $f'(x)=x\cos x-\sin x+1$. ………………… 1分

记 $g(x)=f'(x)=x\cos x-\sin x+1$,则 $g'(x)=-x\sin x$. ………………………………… 2分

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$时,$g'(x)<0$;当 $x\in(\pi,2\pi]$时,$g'(x)>0$.

$g(x)$在$[\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减,在$(\pi,2\pi]$上单调递增,即 $f'(x)$在$[\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减,在$(\pi,2\pi]$上单调递增.

………………………………………………………………………… 3分

因为 $f'(\frac{\pi}{2})=0$,$f'(\pi)=-\pi+1<0$,$f'(2\pi)=2\pi+1$,

所以存在唯一 $x_0\in(\pi,2\pi)$,使得 $f'(x)=0$,即 $f'(x)$在$(\frac{\pi}{2},2\pi)$内存在唯一零点. ………………… 4分

(2)解:由(1)可知当 $x\in[\frac{\pi}{2},x_0)$时,$f'(x)<0$;当 $x\in(x_0,2\pi]$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$[\frac{\pi}{2},x_0)$上单调递减,在$(x_0,2\pi]$上单调递增. ………………………………… 5分

因为当 $x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$时,$f(x)\leqslant ax$ 恒成立,

则至少满足 $f(\frac{\pi}{2})=\pi\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot a$,$f(2\pi)=2\pi+2\leqslant2a\pi$,即 $a\geqslant2$. ………………………… 7分

①当 $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$时,$f(\frac{3\pi}{2})=0$,$f(x)_{max}=f(\frac{\pi}{2})=\pi$,满足 $f(x)\leqslant2x$; ………………………… 8分

②当 $x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]$时,$f(x)_{max}=f(2\pi)=2\pi+2$,而 $2x\geqslant2\cdot\frac{3\pi}{2}=3\pi$,满足 $f(x)\leqslant2x$. ………………… 9分

即当 $x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$时,都有 $f(x)\leqslant2x$. 又当 $a\geqslant2$,$x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$时,$ax\geqslant2x$,

从而当 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant ax$ 对一切 $x\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$ 恒成立. ……………… 11 分

故 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$. ……………… 12 分

22. 解：(1)设 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$M(x,y)$，

则 $\begin{cases} x=\dfrac{2\cos\theta+6}{2}=3+\cos\theta, \\ y=\dfrac{2\sin\theta}{2}=\sin\theta, \end{cases}$ 消去 θ 得 $(x-3)^2+y^2=1$， ……………… 3 分

即 $x^2+y^2-6x+8=0$，化为极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+8=0$. ……………… 5 分

(2)由题意可得直线 $l:y=kx$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$.

设 $A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$，

因为 $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AB}$，即 $3\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB}$，所以 $3\rho_1=2\rho_2$.

联立 $\begin{cases} \rho^2-6\rho\cos\theta+8=0, \\ \theta=\alpha, \end{cases}$ 整理得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+8=0$， ……………… 7 分

则 $\begin{cases} \rho_1+\rho_2=6\cos\alpha, \\ \rho_1\rho_2=8, \\ 3\rho_1=2\rho_2, \end{cases}$ 解得 $\cos\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$. ……………… 8 分

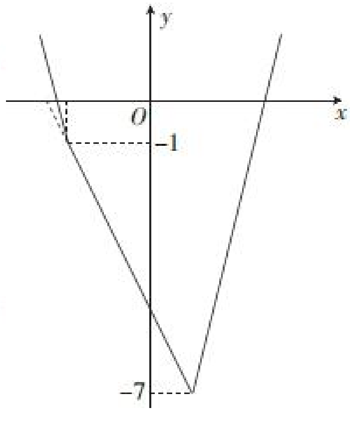
故 $k^2=\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{2}{25}$，即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. ……………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|x+2|+3|x-a|=\begin{cases} -4x+3a-2, x\leqslant -2, \\ -2x+3a+2, -2<x<a, \\ 4x-3a+2, x\geqslant a. \end{cases}$ ……………… 3 分

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)_{\min}=f(a)=a+2$. ……………… 5 分

(2)因为 $a=1$，所以 $g(x)=\begin{cases} -4x-9, x\leqslant -2, \\ -2x-5, -2<x<1, \\ 4x-11, x\geqslant 1. \end{cases}$ ……………… 6 分



画出 $g(x)$ 的大致图象如图所示.

令 $-4x-9=0$，得 $x=-\dfrac{9}{4}$；令 $-2x-5=0$，得 $x=-\dfrac{5}{2}$；令 $4x-11=0$，得 $x=\dfrac{11}{4}$. ……………… 8 分

因为 $g(-2)=-1$，$g(1)=-7$，所以所求图形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{11}{4}+\dfrac{5}{2})\times 7-\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{9}{4}+\dfrac{5}{2})\times 1=\dfrac{73}{4}$. ………………