

2023 年湖北省孝感市高二 1 月期末考试

高二数学参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	B	C	A	D	C	D	ABC	AD	ABD	ABD

13. $x - 6y + 6 = 0$ 或 $x - 6y - 6 = 0$ 14. 4 15. $a_n = 6n - 5 (n \in \mathbf{N}^*)$ 16. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$

1. 【答案】B

【解析】根据题意，由 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，设 $\vec{b} = t\vec{a}$ ，即 $(x, -1, y) = t(-1, 2, -1) = (-t, 2t, -t)$

解可得： $t = -\frac{1}{2}$ ，则有 $x = y = \frac{1}{2}$ ，由此得 $x + y = 1$ ，故选：B.

2. 【答案】A

【解析】当 $m = 2$ 时，代入两直线方程中，易知两直线平行，即充分性成立. 当 $l_1 \parallel l_2$ 时，显然 $m \neq 0$ ，从而有 $\frac{2}{m} = m - 1$ ，即 $m^2 - m - 2 = 0$ ，解得 $m = 2$ 或 $m = -1$ ，但当 $m = -1$ 时，两直线重合，不符合要求，故必要性成立.

3. 【答案】B

【解析】将字母 a, b, c 填入标号为 a, b, c 的三个方格里有 6 种不同的填法，这 6 种情况发生的可能性是相等的. 而每个方格的标号与所填的字母均不相同只有两种不同的填法. 故所求概率 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4. 【答案】C

【解析】法一 设点 C 为圆心. $\because$ 点 C 在直线 $x + y - 2 = 0$ 上， $\therefore$ 可设点 C 的坐标为 $(a, 2 - a)$.

又 $\because$ 该圆经过 A, B 两点， $\therefore |CA| = |CB|$.

$$\therefore \sqrt{(a-1)^2 + (2-a+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2-a-1)^2}, \text{ 解得 } a=1.$$

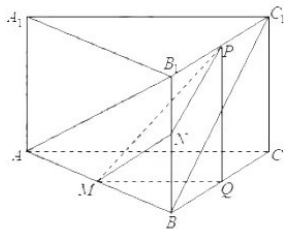
$\therefore$ 圆心坐标为 $C(1, 1)$ ，半径长 $r = |CA| = 2$. 故所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

法二 排除法. 根据圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上，排除 B, D. 根据点 $B(-1, 1)$ 在圆上，排除 A，故选 C.

5. 【答案】A

【解析】解法一：如图所示，设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，

则 AB_1, BC_1 夹角为 $\angle MPN$ 和 $\angle NPM$ 或其补角（因异面直线所成角为 $(0, \frac{\pi}{2}]$ ），



可知 $MN = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $NP = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 作 BC 中点 Q , 则 $\triangle PQM$ 为直角三角形;

$\therefore PQ = 1$, $MQ = \frac{1}{2}AC$, $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

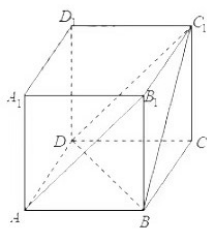
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times (-\frac{1}{2}) = 7, \therefore AC = \sqrt{7}, \therefore MQ = \frac{\sqrt{7}}{2};$$

在 $\triangle MQP$ 中, $MP = \sqrt{MQ^2 + PQ^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$;

$$\text{在 } \triangle PMN \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos \angle MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - PM^2}{2MN \cdot NP} = \frac{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{11}}{2})^2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{5};$$

又异面直线所成角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore AB_1$ 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解法二】如图所示,



补成四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 求 $\angle BC_1D$ 即可;

$$BC_1 = \sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}, \quad C_1D = \sqrt{5}, \quad \therefore BC_1^2 + BD^2 = C_1D^2, \quad \therefore \angle DBC_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \cos \angle BC_1D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

6. 【答案】D

【解析】当双曲线的焦点在 x 轴上时, 离心率 $e = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1 + (2)^2} = \sqrt{5}$;

$$\text{当焦点在 } y \text{ 轴上时 } e = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

7. 【答案】C

湖北省孝感市重点高中教科协作体*数学答案(共8页)第2页

【解析】由 $S_8 = S_{10}$ 得 $a_1 - \frac{17}{2}d$ ，由 $a_1 > 0$ ，得到 $d < 0$ ，所以 $S_n - na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}(n^2 - 18n)$ ，从而当 $n=9$ 时 S_n 有最大值。

8. 【答案】D

【解析】对于 A：由题意可得 $4+m=7$ ，所以 $m=3$ ， $e=\frac{1}{2}$ ，正确；

对于 B：记右焦点为 $F_2(1,0)$ ，设 $M(x_0, y_0)$ ，则 $|MF_2|^2 = (x_0-1)^2 + y_0^2 = (x_0-1)^2 + (7-x_0^2) = 8-2x_0$ ，而 $x_0 \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ ， $\therefore |MF_2|^2 \leq 8+2\sqrt{7}$ ，从而 $|MF_2| \leq \sqrt{7}+1$ ，B 正确；

对于 C：由题意易得 PQ 为圆 E 的直径， A, B 关于原点对称，从而 $k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$ ，正确；

对于 D：易得 $S_{\triangle MPQ} \leq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$ ，D 错误。

9. 【答案】ABC

【解析】由题意知， $a_2 + a_3 = 2a_1 = 2$ ，又 $a_2 a_3 = \frac{3}{4}$ ，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列， $\therefore a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_2 = \frac{3}{2}$ 。

$\therefore$ 公差 $d = \frac{a_4 - a_2}{2} = -\frac{1}{2}$ ，故 A 正确；又 $a_1 = a_2 - d = 2$ ， $\therefore a_n = 2 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$ ，故 B 正确；

由上可知 $a_1 a_n = 2a_n$ ，则当 $n \geq 2$ 时， $2a_n - 2a_{n-1} = 2(a_n - a_{n-1}) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ ，当 $n=1$ 时， $a_1^2 = 4$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_1 a_n\}$ 是首项为 4，公差为 -1 的等差数列，故 C 正确；

$\therefore a_1 a_n = 4 - (n-1) = 5-n$ ， $\therefore a_1 a_7 + a_4 = 5-7 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ ，故 D 错误。故选 ABC。

10. 【答案】AD

【解析】将直线 l 的方程整理为 $(x+y-4) + m(2x+y-7) = 0$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x+y-7=0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

则无论 m 为何值，直线 l 过定点 $D(3,1)$ ，故 A 正确；

令 $x=0$ ，则 $(y-2)^2 = 24$ ，解得 $y = 2 \pm 2\sqrt{6}$ ，故圆 C 被 y 轴截得的弦长为 $4\sqrt{6}$ ，故 B 不正确；

因为 $(3-1)^2 + (1-2)^2 = 5 < 25$ ，所以点 D 在圆 C 的内部，直线 l 与圆 C 相交，故 C 不正确；

圆心 $C(1,2)$ ，半径为 5， $|CD| = \sqrt{5}$ ，当截得的弦长最短时， $l \perp CD$ ， $k_{CD} = -\frac{1}{2}$ ，

则直线 l 的斜率为 2，此时直线 l 的方程为 $y-1=2(x-3)$ ，即 $2x-y-5=0$ ，故 D 正确。

11. 【答案】ABD

湖北省孝感市重点高中教科研协作体*数学答案（共 8 页）第 3 页

【解析】对于A：设 $|BF| - 3|FA| = 3t$ ，过A做 $AM \perp BB_1$ 于点M，则 $|BM| = 2t$ ， $|AB| = 4t$ ，易得

$\angle ABM = 60^\circ$ ，从而A正确；

对于B：过P、E分别作 $PP_1 \perp m$ 、 $EE_1 \perp m$ 于点 P_1 、 E_1 ，则 $\|PE\| - \|PF\| = \|PE\| - \|PP_1\| \leq \|EE_1\| = 2$ ，从而B正确；

对于C：易得 $|AB| = x_A + x_B + 2 = 8$ ，C错误；

对于D：由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 得 $y^2 - \frac{4}{k}y - 4 = 0$ ， $\therefore y_A y_B = -4$ ， $\overrightarrow{FA_1} \cdot \overrightarrow{FB_1} = 4 + y_A y_B = 0$ ，从而 $\angle A_1 F B_1 = 90^\circ$ 。

12. 【答案】ABD

【解析】对于A：连接DB，因为正方体中， $BB_1 \perp$ 平面ABCD，

$AC \subset$ 平面ABCD，所以 $BB_1 \perp AC$ ，又因为 $DB \perp AC$ ，DB， BB_1

为平面 $DBB_1 D_1$ 内的两条相交直线，所以 $AC \perp$ 平面 $DBB_1 D_1$ ，

因为 $DB_1 \subset$ 平面 $DBB_1 D_1$ ，所以 $DB_1 \perp AC$ ，同理可得 $DB_1 \perp AD_1$ ，因为 AD_1 ，

AC 为平面 ACD_1 内两条相交直线，可得 $DB_1 \perp$ 平面 ACD_1 ， $DB_1 \subset$ 平面 $PB_1 D$ ，从而平面 $PB_1 D \perp$ 平面 ACD_1 ，

故A正确；

对于B：连接 $A_1 B$ ， $A_1 C_1$ ， $A_1 C_1 \parallel AC$ ， $A_1 C_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 ， $AC \subset$ 平面 ACD_1 ，所以 $A_1 C_1 \parallel$ 平面 ACD_1 ，

同理 $BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1 ，又 $A_1 C_1$ 、 BC_1 为平面 $BA_1 C_1$ 内两条相交直线，所以平面 $BA_1 C_1 \parallel$ 平面 ACD_1 ，

因为 $A_1 P \subset$ 平面 $BA_1 C_1$ ，所以 $A_1 P \parallel$ 平面 ACD_1 ，故B正确；

对于C：因为 $AD_1 \parallel BC_1$ ，所以 $A_1 P$ 与 AD_1 所成角即为 $A_1 P$ 与 BC_1 所成的角， $A_1 B = BC_1 = A_1 C_1$ ，则 $\triangle BA_1 C_1$ 为等边三角形，当P与线段 BC_1 的两端点重合时， $A_1 P$ 与 AD_1 所成角取最小值 $\frac{\pi}{3}$ ；当P与线段 BC_1 的中点重合时，

$A_1 P$ 与 AD_1 所成角取最大值 $\frac{\pi}{2}$ ，故 $A_1 P$ 与 AD_1 所成角的范围是 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，故C不正确；

对于D：由选项B得 $BC_1 \parallel$ 平面 $AD_1 C$ ，故 BC_1 上任意一点到平面 $AD_1 C$ 的距离均相等，

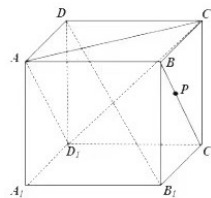
所以以P为顶点，平面 $AD_1 C$ 为底面，则三棱锥 $P-AD_1 C$ 的体积不变，又 $V_{D_1-APC} = V_{P-AD_1 C}$ ，

所以三棱锥 D_1-APC 的体积不变，故D正确。

故选ABD。

13. 【答案】 $x - 6y + 6 = 0$ 或 $x - 6y - 6 = 0$

【解析】设直线l的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ， $\therefore \frac{1}{2}|ab| = 3$ ，且 $-\frac{b}{a} = \frac{1}{6}$ ， $\therefore a = -6$ ， $b = 1$ 或 $a = 6$ ， $b = -1$ ， $\therefore$ 直线l



的方程为 $\frac{x}{-6} + y = 1$ 或 $\frac{x}{6} - y = 1$, 即 $x - 6y + 6 = 0$ 或 $x - 6y - 6 = 0$.

14. 【答案】4

【解析】 $x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2^2$, 圆心坐标为(2,0), 半径为 2; $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 1^2$, 圆心坐标为(-2,0), 半径为 1. 两圆圆心距为 4, 两圆半径和为 3, 因为 $4 > 3$, 所以两圆的位置关系是外离, 故两圆的公切线共有 4 条.

15. 【答案】 $a_n = 6n - 5 (n \in \mathbb{N}^*)$

【解析】依题意得, $S_n = 3n - 2$, 即 $S_n = 3n^2 - 2n$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 - 2n) - [3(n-1)^2 - 2(n-1)] = 6n - 5$,

因为 $a_1 = S_1 = 1$, 满足 $a_n = 6n - 5$, 所以 $a_n = 6n - 5 (n \in \mathbb{N}^*)$.

16. 【答案】 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$

【解析】不妨设 M 为第一象限的点, F_1 为左焦点, 设椭圆的长半轴长为 a_1 , 双曲线的实半轴长为 a_2 , 则根据椭圆及双曲线的定义可得 $|MF_1| + |MF_2| = 2a_1$, $|MF_1| - |MF_2| = 2a_2$. 所以 $|MF_1| = a_1 + a_2$, $|MF_2| = a_1 - a_2$,

$|F_1F_2| = 2c$, 在 $\triangle MF_1F_2$ 中, $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{1}{4}$, 由余弦定理得

$4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)\cos \angle F_1MF_2$, 化简得 $3a_1^2 + 5a_2^2 = 8c^2$, 即 $\frac{3}{e_1^2} + \frac{5}{e_2^2} = 8$.

所以 $\frac{3}{e_1^2} + \frac{5}{e_2^2} = 8 \geq 2\sqrt{\frac{15}{e_1^2 e_2^2}}$, 从而 $\frac{1}{e_1 e_2} \leq \frac{4\sqrt{15}}{15}$, 当且仅当 $e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $e_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立.

17. 解: 设事件 $A =$ “甲通过体能测试”, 事件 $B =$ “乙通过体能测试”, 事件 $C =$ “丙通过体能测试”,

则 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(C) = \frac{1}{3}$.

(1) 设 M_1 表示 “甲、乙、丙 3 人都通过体能测试”, 即 $M_1 = ABC$, 则由 A, B, C 相互独立, 可得 $P(M_1) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ 4 分

(2) 设 M_2 表示 “只有 2 人通过体能测试”, 则 $M_2 = AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$, 由于事件 A 与 B , A 与 C , B 与 C 均相互独立, 且事件 $AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$, $\bar{A}BC$ 两两互斥, 则

$P(M_2) = P(AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC) = P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{3} +$

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{3}{20} = \frac{23}{60} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 0$. $\because a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 22$, $a_3 a_4 = 117$,
 $\therefore a_3, a_4$ 是方程 $x^2 - 22x + 117 = 0$ 的两个根. 又 $\because$ 公差 $d > 0$, $\therefore a_3 < a_4$,

$$\therefore a_3 = 9, a_4 = 13. \therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 9 \\ a_1 + 3d = 13 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases} \therefore a_n = 4n - 3. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

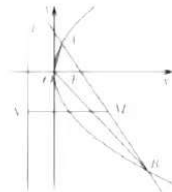
$$(2) \text{ 由 (1) 知, } S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 2n^2 - n, \therefore b_n = \frac{S_n}{n+c} = \frac{2n^2 - n}{n+c}.$$

$$\therefore b_1 = \frac{1}{c+1}, b_2 = \frac{6}{c+2}, b_3 = \frac{15}{c+3}. \because \{b_n\} \text{ 是等差数列, } \therefore 2b_2 = b_1 + b_3,$$

$$\therefore 2c^2 + c = 0. \therefore c = -\frac{1}{2} \text{ (} c = 0 \text{ 舍去)}. \text{ 经检验, } c = -\frac{1}{2} \text{ 符合题意, } \therefore c = -\frac{1}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 依题意准线 l 的方程为 $x = -2$, 即 $-\frac{p}{2} = -2$, 则 $p = 4$,

抛物线的方程为 $y^2 = 8x$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



(2) 设 AB 的方程为 $x = ty + 2$

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 8ty - 16 = 0$$

$$\text{依题意 } y_1 + y_2 = 8t \text{ 则 } 8t = -3 \times 2, \therefore t = -\frac{3}{4}$$

$$|AB| = \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{64t^2 + 64} = 8(1+t^2) = 8\left(1 + \frac{9}{16}\right) = \frac{25}{2}$$

$$O \text{ 到 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{8}{5}, \text{ 从而得 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{8}{5} = 10. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 证明: 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

四边形 A_1ACC_1 是平行四边形, 而 $AC = AA_1$,

则平行四边形 A_1ACC_1 是菱形, 连接 A_1C , 如图,

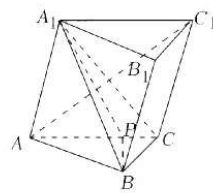
则有 $A_1C \perp AC_1$, 因 $A_1B \perp AC_1$, $A_1B \cap A_1C = A_1$,

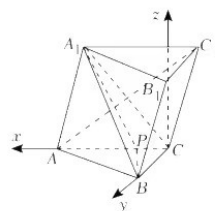
$A_1B, A_1C \subset$ 平面 A_1BC , 于是得 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BC ,

而 $BC \subset$ 平面 A_1BC , 则 $AC_1 \perp BC$, 由 $\angle ACB = 90^\circ$, 得 $AC \perp BC$, $AC \cap AC_1 = A$, $AC, AC_1 \subset$ 平面 A_1ACC_1 ,

从而得 $BC \perp$ 平面 A_1ACC_1 , 又 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解: 在平面 A_1ACC_1 内过 C 作 $Cz \perp AC$,





由(1)知平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$,

则 $Cz \perp$ 平面 ABC , 以 C 为原点, 射线 CA, CB, Cz 分别为 x, y, z 轴正半轴建立空间直角坐标系, 如图,

因 $\angle A_1AC = 60^\circ, AC = AA_1 = 4, BC = 2$, 则 $C(0, 0, 0), A(4, 0, 0), B(0, 2, 0), A_1(2, 0, 2\sqrt{3})$,

假设在线段 AC 上存在符合要求的点 P , 设其坐标为 $P(\lambda, 0, 0), (0 \leq \lambda \leq 4)$,

则有 $\overrightarrow{BA_1} = (2, -2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{BP} = (\lambda, -2, 0)$,

设平面 BA_1P 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 2x - 2y + 2\sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = \lambda x - 2y = 0 \end{cases}$,

令 $x = 2$ 得 $\vec{n} = (2, \lambda, \frac{\lambda-2}{\sqrt{3}})$, 而平面 A_1ACC_1 的一个法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$,

$$\text{依题意, } |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{\lambda}{\sqrt{2^2 + \lambda^2 + \left(\frac{\lambda-2}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

化简整理得: $3\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$ 而 $0 \leq \lambda \leq 4$, 解得 $\lambda = 1$,

所以在线段 AC 上存在一点 P , 且 P 是靠近 C 的四等分点, 使平面 BA_1P 和平面 A_1ACC_1 所成角的余弦值为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 由圆心在 x 轴上的圆 C 与直线 $l: 4x + 3y - 6 = 0$ 切于点 $M\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$, 设 $C(a, 0)$,

直线 $l: 4x + 3y - 6 = 0$ 的斜率为 $-\frac{4}{3}$,

$$\text{则 } k_{CM} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5} - a}, \text{ 所以 } \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5} - a} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1.$$

$$\text{所以 } a = -1, \text{ 所以 } C(-1, 0), |CM| = \sqrt{\left(-1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = 2, \text{ 即 } r = 2$$

所以圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$, 与圆联立方程组可得 $(1+k^2)x^2 + 2x - 3 = 0$,

$$\Delta = 4 + 12(1+k^2) > 0, \text{ 由根与系数的关系得 } x_1 + x_2 = -\frac{2}{1+k^2}, x_1 x_2 = -\frac{3}{1+k^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore |PN|^2 + |QN|^2 &= (x_1-2)^2 + (y_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (y_2-1)^2 = (x_1-2)^2 + (kx_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (kx_2-1)^2 \\ &= (1+k^2)(x_1+x_2)^2 - 2(1+k^2)x_1x_2 - (4+2k)(x_1+x_2) + 10 = \frac{12+4k}{1+k^2} + 16, \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

令 $t=3+k (t>3)$, 则 $k=t-3$,

$$\text{所以 } \frac{12-4k}{1+k^2} + 16 = \frac{4t}{1+(t-3)^2} + 16 = \frac{4}{t-\frac{10}{t}-6} + 16 \leq \frac{4}{2\sqrt{10}-6} + 16 = 2\sqrt{10} + 22,$$

当且仅当 $t = \frac{10}{t}$, 即 $t = \sqrt{10}$ 时取等号, 此时 $k = \sqrt{10} - 3$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $|PN|^2 + |QN|^2$ 的最大值为 $2\sqrt{10} + 22$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1)依题意得 $|PF_1| + |PF_2| = |QF_2| = 2\sqrt{2}$, 则动点 P 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的椭圆, 其中 $a = \sqrt{2}$,

$c=1, b^2 = a^2 - c^2 = 1$, 所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{则由 } \begin{cases} x=ty+m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (t^2+2)y^2 + 2mty + m^2 - 2 = 0, \text{ 由根与系数的关系得 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{t^2+2} \\ y_1 y_2 = \frac{m^2-2}{t^2+2} \end{cases} \quad ①$$

由题意 M, N 两点不在 x 轴上, 所以 $x_1 \neq \pm\sqrt{2}$, $x_2 \neq \pm\sqrt{2}$, $m \neq \pm\sqrt{2}$, 又点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$

$$\text{所以 } k_1 = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{2}}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 - \sqrt{2}}, \text{ 由 } \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \text{ 得 } \frac{y_1}{x_1 - \sqrt{2}} = -\frac{x_1 - \sqrt{2}}{2y_1}$$

$$\text{从而由已知 } k_1 = 2k_2 \text{ 得 } -\frac{x_1 - \sqrt{2}}{2y_1} = 2\frac{y_2}{x_2 - \sqrt{2}}, \text{ 即 } (x_1 - \sqrt{2})(x_2 - \sqrt{2}) = -4y_1 y_2 \quad ②$$

$$\text{又 } x_1 = ty_1 + m, x_2 = ty_2 + m \quad ③, \text{ 将 } ③ \text{ 代入 } ② \text{ 得 } (t^2 + 4)y_1 y_2 + (m - \sqrt{2})t(y_1 + y_2) + (m - \sqrt{2})^2 = 0.$$

$$\text{将 } ① \text{ 代入上式并整理得 } (t^2 + 4)(m^2 - 2) + (m - \sqrt{2})t(-2mt) + (m - \sqrt{2})^2(t^2 + 2) = 0.$$

$$\because m - \sqrt{2} \neq 0 \therefore (t^2 + 4)(m - \sqrt{2}) + t(-2mt) + (m - \sqrt{2})(t^2 + 2) = 0, \text{ 整理得 } 6m + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\therefore m = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 故直线 } l \text{ 恒过定点 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

说明: 其它解法酌情给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线