2023年兰州市高三诊断考试

理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分.答卷前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题纸上.

2. 本试卷满分150分，考试用时120分钟. 答题全部在答题纸上完成，试卷上答题无效.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $A=\{x\in N\mid x$是不大于5的奇数$\}$，$B=\{-3,2,3\}$，则集合$A\cup B=$

A. $\{-3,1,3,5\}$　B. $\{-3,1,2,3\}$　C. $\{-3,1,2,3,5\}$　D. $\{3\}$

2. 已知复数z满足$2(z-\bar{z})+z\cdot\bar{z}=2+4i$，$z$在复平面内对应的点在第二象限，则$z=$

A. $-1-i$　B. $1+i$　C. $-1+i$　D. $-2+i$

3. 2022年8—12月某市场上草莓价格(单位：元/千克)x的取值为：12，16，20，24，28，市场需求量(单位：百千克)$y=-0.5x+20$，则市场需求量的方差为

A. 8　B. 4　C. $2\sqrt{2}$　D. 2

4. 18世纪数学家欧拉研究调和级数得到了以下的结果：当n很大时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma$（常数$\gamma=0.557\dots$）. 利用以上公式，可以估计$\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\dots+\frac{1}{20000}$的值为

A. $\ln(2\times10^4)$　B. $4+\ln2$　C. $4-\ln2$　D. $\ln2$

5．已知点 P 在圆 C：$x^2-4x+y^2=0$ 上，其横坐标为 1，抛物线 $x^2=-2py(p>0)$ 经过点 P，则抛物线的准线方程是

A．$y=\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B．$x=\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D．$y=\frac{\sqrt{3}}{12}$

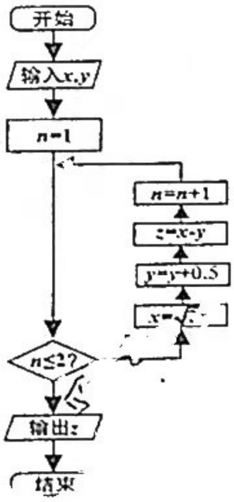
6．2021 年起，甘肃省普通高中开始实施新一轮课程改革并使用新版教材，某校数学组从人教 A 版，人教 B 版，苏教版，湘教版，北师大版，沪教版这 6 个版本的数学新教材中选出 3 个版本进行比较研究，要求人教社两个版本的教材不同时被选择，则选择的方法种数是

A．20　　B．18　　C．16　　D．10

7．已知命题 p：“若直线 $a//$ 平面 α，平面 $\alpha//$ 平面 β，则直线 $a//$ 平面 β”，命题 q：“棱长为 a 的正四面体的外接球表面积是 $\frac{3\pi a^2}{2}$”，则以下命题为真命题的是

A．$p\vee q$　　B．$p\wedge q$　　C．$p\vee(\neg q)$　　D．$(\neg p)\wedge(\neg q)$

8．如图是某算法的程序框图，若执行此算法程序，输入区间 $[1,5]$ 内的任意两个实数 x，y，则输出的 $z<0$ 的概率为



A．$\frac{1}{8}$

B．$\frac{1}{4}$

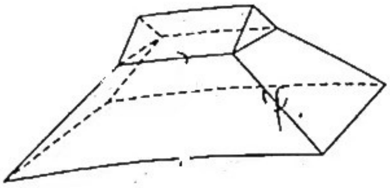
C．$\frac{1}{2}$

D．$\frac{3}{4}$

9．攒尖是中国古建筑中屋顶的一种结构形式，常见的有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等，多见于亭阁式建筑，兰州市著名景点三台阁的屋顶部分也是典型的攒尖结构．如图所示是某研究性学习小组制作的三台阁仿真模型的屋顶部分，它可以看作是不

含下底面的正四棱台和正三棱柱的组合体，已知正四棱台上底、下底、侧棱的长度(单位：dm)分别为2，6，4，正三棱柱各棱长均相等，则该结构表面积为

A．$34\sqrt{3}+8\ \text{dm}^2$　B．$34\sqrt{3}+44\ \text{dm}^2$　C．$34\sqrt{3}+48\ \text{dm}^2$　D．$34\sqrt{5}+8\ \text{dm}^2$



10．下面关于函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ 的叙述中，不正确的是

A．$f(x)$的最小正周期为2π

B．$f(x)$的对称中心为$(k\pi,0)$

C．$f(x)$的单调增区间为$(2k\pi,2k\pi+\pi)$

D．$f(x)$的对称轴为$x=k\pi$

11．已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的一条渐近线上存在关于原点$O$对称的两点$M$和$N$，若双曲线的左、右焦点$F_1$，$F_2$与$M$，$N$组成的四边形为矩形，若该矩形的面积为$2\sqrt{6}a^2$，则双曲线的离心率为

A．$\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

12．已知函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$，其中 $a=\sin\dfrac{\pi}{6}$，$b=\sin\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{3}{4}$，$c=\sin(\cos\dfrac{3}{4})$，则以下判断正确的是

A．函数$f(x)$有两个零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且$(x_1-b)(x_1-c)<0$，$(x_2-b)(x_2-c)>0$

B．函数$f(x)$有两个零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且$(x_1-a)(x_1-b)<0$，$(x_2-a)(x_2-b)>0$

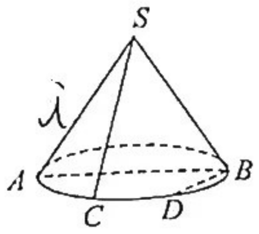
C．函数$f(x)$有两个零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且$(x_1-b)(x_1-c)<0$，$(x_2-a)(x_2-b)<0$

D．函数$f(x)$只有一个零点x_0，且$(x_0-a)(x_0-b)>0$，$(x_0-b)(x_0-c)<0$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=1$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=$_______.

14. 如图，圆锥的轴截面 SAB 是边长为 a 的正三角形，点 C，D 是底面弧 AB 的两个三等分点，则 SC 与 BD 所成角的正切值为_______.



15. 用长度为1，4，8，9的4根细木棒围成一个三角形（允许连接，不允许折断），则其中某个三角形外接圆的直径可以是_______（写出一个答案即可）.

16. 定义：如果任取一个正常数 T，使得定义在R上的函数 $y=f(x)$ 对于任意实数 x，存在非零常数 m，使 $\dfrac{f(x+T)}{f(x)}=m$，则称函数 $y=f(x)$ 是"ξ函数"．以下关于"ξ函数"的判断：①函数 $y=ka^{x+b}$（$a>0$ 且 $a\neq1$，k、b 为非零常数）必是"ξ函数"；②若 $m>1$，则"ξ函数" $f(x)$ 为增函数；③若"ξ函数"满足对任意实数 x，都有 $f(x)>0$，则所有的点 $(x+nT,\ln[f(x+nT)])$ $(n\in\mathrm{N})$ 都在同一条直线上．其中正确判断的序号是_______.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

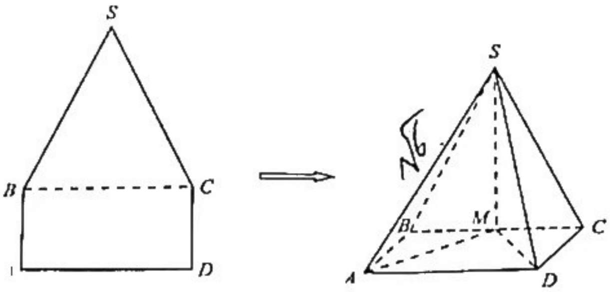
（一）必考题：共60分.

7.（12分）已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，对任意的 $i\in\mathrm{N}^*$ 都有 $a_{n+i}-a_n=i$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）数列 $\{b_n\}$ 满足：$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$，且 $b_1=1$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12分）如图所示的五边形 $SBADC$ 中 $ABCD$ 是矩形，$BC=2AB$，$SB=SC$，沿 BC 折叠成四棱锥 $S-ABCD$，点 M 是 BC 的中点，$SM=2$．



（1）在四棱锥 $S-ABCD$ 中，可以满足条件① $SA=\sqrt{6}$；② $\cos\angle SBM=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；③ $\sin\angle SAM=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，请从中任选两个作为补充条件，证明：侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$；

(注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．)

（2）在（1）的条件下求直线 SC 与平面 SAD 所成角的正弦值．

19.（12分）2022年第22届世界杯足球赛在卡塔尔举行，这是继韩日世界杯之后时隔20年第二次在亚洲举行的世界杯足球赛，本届世界杯还是首次在北半球冬季举行的世界杯足球赛．每届世界杯共32支球队参加，进行64场比赛，其中小组赛阶段共分为8个小组，每个小组的4支队伍进行单循环比赛共计48场，以积分的方式产生16强，之后的比赛均为淘汰赛，1/8决赛8场产生8强，1/4决赛4场产生4强，半决赛两场产生2强，三四名决赛一场，冠亚军决赛一场．下表是某五届世界杯32进16的情况统计：

	欧洲球队		美洲球队		非洲球队		亚洲球队	
	32强	16强	32强	16强	32强	16强	32强	16强
1	13	10	9	4	5	1	5	1
2	13	10	10	5	5	1	4	0
3	13	6	10	8	5	2	4	0
4	14	10	8	5	5	0	5	1
5	13	8	8	3	5	2	6	3
合计	66	44	45	25	25	6	24	5

（1）根据上述表格完成列联表：

	16强	非16强	合计
欧洲地区		6	
其他地区			110
合计			

并判断是否有95%的把握认为球队进入世界杯16强与来自欧洲地区有关？

（2）淘汰赛阶段全场比赛90分钟内进球多的球队获胜，如果参赛双方在90分钟内无法决出胜负，将进行30分钟的加时赛．加时赛阶段，如果两队仍未分出胜负，则通过点球决出胜负．若每支球队90分钟比赛中胜，负，平的概率均为$\frac{1}{3}$，加时赛阶段胜，负，平的概率也均为$\frac{1}{3}$，并且各阶段比赛相互独立．设半决赛中进行点球比赛的场次为ξ，求ξ的分布列及期望．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\ge k)$	0.050 a	b 0.010	0.001
k	3.841 c	d. 6.635	10.828

20.（12分）已知F_1，F_2是椭圆E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$B_1B_2$是椭圆的短轴，菱形$F_1B_1F_2B_2$的周长为8，面积为$2\sqrt{3}$，椭圆$E$的焦距大于短轴长．

（1）求椭圆E的方程；

（2）若P是椭圆E内的一点（不在E的轴上），过点P作直线交E于A，B两点，且点P为AB的中点，椭圆E_1：$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>n>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点$P$也在$E_1$上，求证：直线$AB$与$E_1$相切．

21.（12分）已知函数 $f(x)=x^n\ln x-n\ln x\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）当 $n=1$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $n>1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 P，Q 两点，且点 Q 在右侧．

ⅰ）若函数 $y=f(x)$ 在点 Q 处的切线为 $y=g(x)$，求证：当 $x>1$ 时，$f(x)\ge g(x)$；

ⅱ）若方程 $f(x)=t(0<t<n-1)$ 有两根 a，b，求证：$|a-b|<\dfrac{\sqrt[n]{n^{1-n}}}{\ln n}t+\sqrt[n]{n}$．

（二）选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4-4：坐标系与参数方程]

22.（10分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=2\rho\cos\theta+a$，其中 $a>-1$．

（1）当 $a=0$ 时曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 M、N 两点，求线段 MN 的长度；

（2）过点 $P(3,-1)$ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）与曲线 C_2 交于 A、B 两点，若 $|PA|\cdot|PB|=1$，求实数 a．

[选修4-5：不等式选讲]

23.（10分）已知 $f(x)=2|x+1|+|x-2|$．

（1）解不等式 $f(x)\ge 4$；

（2）若对于任意正实数 x，不等式 $f(x)+ax-1>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线