成都外国语学校 2021-2022 学年度上期入学考试
高二数学试题（理科）参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	A	C	B	B	A	B	D	C	B	C

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ；　14. 2 ；　15. $8\sqrt{6}\pi$ ；　16. 5 ；

三、解答题（共 70 分）

17．解：（1）因为 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=-\frac{4}{5}$，α，β 均为第二象限角.

所以 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，$\sin\beta=\frac{3}{5}$，

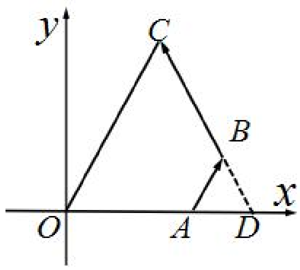
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\quad=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$$

（2）由（1）知 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$，$\tan\beta=-\frac{3}{4}$，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{5}{12}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{16}{63}$$

18.（1）在平面直角坐标系 xOy 中，设 $B(x,y)$，则因为 $|\overrightarrow{OA}|=2|=2|\overrightarrow{AB}|=2$，所以 A（2，0）．　又 $\angle OAB=\frac{2\pi}{3}$．所以 $x_B=2+\cos(\pi-\frac{2\pi}{3})=\frac{5}{2}$，

$$y_B=0+\sin(\pi-\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{所以点 }B\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



又 $\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\frac{5}{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3})=(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，

所以点 $C\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

由（1）可得 $\overrightarrow{OC}=(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

所以 $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}//\overrightarrow{AB}$．又 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1+3}=2=|\overrightarrow{OA}|$，所以四边形 $OABC$ 为等腰梯形，

如图，延长 CB 交 x 轴于点 D，则 $DC=DO$，$BD=AD$．

又 $\angle BAD=\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\triangle OCD$，$\triangle ABD$ 均为等边三角形.

∴四边形 $OABC$ 的面积 $S=S_{\triangle OCD}-S_{\triangle ABD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=2\sqrt{3}$.

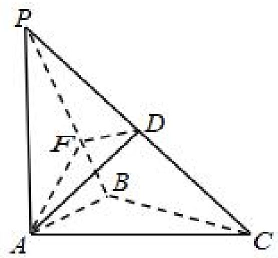
19. （1）$\because PA\perp$ 平面 ABC，且 $BC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PA\perp BC$，又 $AB\perp BC$，且 $PA\cap AB=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，$BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC；

（2）过点 A 作 $AE\perp PB$，连结 DE，

$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，



$\because AE\perp PB$，$\therefore AE\perp$ 平面 PBC，

$\therefore \angle ADE$ 是直线 AD 与平面 PBC 所成角，且 $\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}$

设 $PA=AC=2AB=2a$，

则根据等面积可知 $PA\cdot AB=PB\cdot AE$，$\therefore AE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，

$AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PA=\sqrt{2}a$，$\therefore \sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

所以直线 AD 与平面 PBC 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

20.（1）∵不等式 $ax^2-3x+2>0$ 的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>b\}$，

∴$a>0$，且方程 $ax^2-3x+2=0$ 的两个根是 1 和 b.

由根与系数的关系，得 $\begin{cases}1+b=\dfrac{3}{a},\\ 1\cdot b=\dfrac{2}{a},\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=2$.

（2）∵$a=1$，$b=2$，∴$ax^2-(ac+b)x+bx<0$，即 $x^2-(c+2)x+2x<0$，

即 $x(x-c)<0$.∴当 $c>0$ 时，解得 $0<x<c$；

当 $c=0$ 时，不等式无解；

当 $c<0$ 时，解得 $c<x<0$.

综上，当 $c>0$ 时，不等式的解集是 $(0，c)$；

当 $c=0$ 时，不等式的解集是∅；

当 $c<0$ 时，不等式的解集是$(c，0)$.

21．（1）$\because 2\sin A\cos C=2\sin B-\sin C=2\sin\left(A+C\right)-\sin C$

$=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C-\sin C$，

$\therefore 2\cos A\sin C=\sin C$，

$\because C\in\left(0,\pi\right)$，则 $\sin C>0$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，由 $A\in(0,\pi)$，可得：$A=\frac{\pi}{3}$；

（2）$\because$在锐角$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{3}$，由（1）可得 $A=\frac{\pi}{3}$，$B+C=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

$\therefore c+b=2\sin C+2\sin B=2\sin B+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=2\sin B+\sqrt{3}\cos B+\sin B$

$=3\sin B+\sqrt{3}\cos B=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\ B+\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{2}\end{cases}$，可得 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，可得：$b+c=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(3,2\sqrt{3}\right]$.

22．解：（1）由 $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$ 两边同时除以 $n(n+1)$，

得 $\frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1$，

从而数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为首项 1，公差 $d=1$ 的等差数列，所以 $\frac{b_n}{n}=n$，

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n^2$.

当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1=a_1$，所以 $a_1=1$.

当 $n\geq 2$ 时，$S_n=2a_n-1,S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

两式相减得 $a_n=2a_{n-1}$，又 $a_1=1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，

从而数列 $\{a_n\}$ 为首项 $a_1=1$，公比 $q=2$ 的等比数列，

从而数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，

（2）因为$c_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(a+2\log_2 a_{n+1})}$，

所以$c_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)$，

$$T_{2n}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2n-1}+c_{2n}$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}=\frac{4n}{4n+3}.$$

（3）由（1）得$d_n=a_n\sqrt{b_n}=n\cdot 2^{n-1}$，

$D_n=1\times1+2\times2+3\times2^2+\cdots+n2^{n-1}$，

$2D_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n2^n$，

两式相减得$-D_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n2^n=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n2^n$，

所以$D_n=(n-1)2^n+1$，

由（1）得$S_n=2a_n-1=2^n-1$，

因为对$\forall n\in N^*$，都有$D_n\le nS_n-a$，

即$(n-1)2^n+1\le n(2^n-1)-a$恒成立，

所以$a\le 2^n-n-1$恒成立，

记$d_n=2^n-n-1$，所以$a\le d_{\min}$，

因为$d_{n+1}-d_n=\left[2^{n+1}-(n+1)-1\right]-\left(2^n-n-1\right)=2^n-1>0$，

从而数列$\{d_n\}$为递增数列，

所以当$n=1$时，d_n取最小值$d_1=0$，

于是$\{a|a\le0\}$.