重庆市第八中学2024届高考适应性月考卷（二）
数学参考答案

一、**单项选择题**（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	B	C	B	D	B

二、**多项选择题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	ABD	BD

三、**填空题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	-4	$0.65\left(或\dfrac{13}{20}\right)$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{1}{2e}-\dfrac{\ln2}{4}$

四、**解答题**（共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分10分）

（1）证明：由平面$CBB_1C_1\perp$平面ABC，$CA\perp CB$，

且BC为平面CBB_1C_1与平面ABC的交线，

故有$AC\perp$平面CBB_1C_1，而$CC_1\subset$平面CBB_1C_1，故$AC\perp CC_1$，

又因为$AA_1/\!/CC_1$，所以$AC\perp AA_1$．……………………………………………（4分）

（2）解：由（1）的证明可知，$AC\perp$平面CBB_1C_1，

故点A到平面BCC_1B_1的距离为$AC=1$，则$BC=AC=1$，

又因为$BB_1=AA_1=2$，$\angle B_1BC=60^\circ$，

故$B_1C^2=BC^2+BB_1^2-2BC\cdot BB_1\cdot\cos60^\circ=3$，即$B_1C=\sqrt{3}$，

所以$B_1C\perp BC$，

且BC为平面CBB_1C_1与平面ABC的交线，有$B_1C\perp$平面ABC，

……………………………………………………………………………………（5分）

而$CA\perp CB$，所以可以以C为原点，分别以$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CB_1}$的方向为x，y，z轴的正方向建立如图3所示的空间直角坐标系，

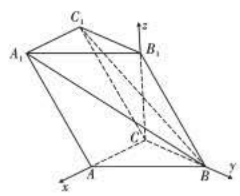
则$C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$B_1(0,0,\sqrt{3})$，

因为$B_1C\perp$平面ABC，

故平面ABC的法向量可记为$\vec{m}=(0,0,1)$，

因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=(0,-1,0)$，故$C_1(0,-1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{C_1A_1}=(1,0,0)$，



设平面A_1C_1B的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y+\sqrt{3}z=0,\\ x=0,\end{cases}$ 取$\vec{n}=(0,\sqrt{3},2)$，………………………（8分）

设平面A_1C_1B与平面ABC的夹角为α，则有

$\cos\alpha=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，故$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．…………………………（10分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 $\sin(C-A)=-1+\sin B$，且 $\sin B=\sin(A+C)$，

所以 $\sin C\cos A-\cos C\sin A=-1+\sin A\cos C+\cos A\sin C$，即 $\sin A\cos C=\dfrac{1}{2}$①，

由正弦定理及 $2a\cos C=b\sin B$，得 $\sin A\cos C=\dfrac{1}{2}\sin^2 B$②，

由①②得 $\sin B=1$，所以 $B=90^\circ$，

因为 $\sin(C-A)=-1+\sin B$，所以 $\sin(C-A)=0$，

所以 $A=C$，即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. ……………………………………………（5 分）

（2）解：如图 4，不妨设 $a=c=1$，所以 $b=\sqrt{2}$，

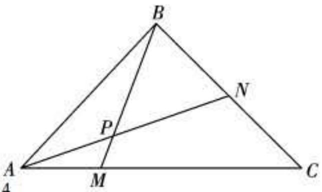


图 4

因为 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，且 AN 为中线，

则 $\overrightarrow{BM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\left(-\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

$|\overrightarrow{BM}|^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{5}{9}$，

$|\overrightarrow{AN}|^2=\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{5}{4}$，

所以 $|\overrightarrow{BM}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$|\overrightarrow{AN}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，……………………………………………………（10 分）

$$\cos\langle\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{AN}\rangle=\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{AN}|}=\frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{3}{5},$$

所以 $\cos\angle MPN=-\dfrac{3}{5}$. ………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）由频率分布直方图得：

$10(2a+3a+7a+6a+2a)=1$，解得 $a=0.005$，………………………………………（1 分）

又设中位数和平均数分别为 x_0，$\overline{x}$，

又因为前三个矩形的面积和为 $10(2a+3a+7a)=0.6$，

前两个矩形的面积和为 $10(2a+3a)=0.25$，故易知 $x_0\in(70,\ 80)$，

所以 $0.25+(x_0-70)\times 7a=0.5$，解得：$x_0=\dfrac{540}{7}$；…………………………………（3 分）

又 $\overline{x}=10(55\times 2a+65\times 3a+75\times 7a+85\times 6a+95\times 2a)=76.5$. ………………………（5 分）

（2）由题意知，诗词达人总数为 $10(2a+6a)\times 100=40$，

设样本中男生人数为 m，则列联表如下：

	诗词达人	非诗词达人	合计
男生	$\dfrac{m}{2}$	$\dfrac{m}{2}$	m
女生	$40-\dfrac{m}{2}$	$60-\dfrac{m}{2}$	$100-m$
合计	40	60	100

$$\therefore \chi^2=\frac{100\left[\frac{m}{2}\left(60-\frac{m}{2}\right)-\frac{m}{2}\left(40-\frac{m}{2}\right)\right]^2}{40\times 60\times m\times(100-m)}=\frac{25m}{6(100-m)}\geqslant 3.841,$$

解得：$m\geqslant 47.97$，

又易知 m 为偶数，所以 m 的最小值为 48，

即被调查的 100 名学生中男生至少有 48 人. ……………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $2a_n=2n+S_n$，令 $n=1$ 得 $2a_1=2+S_1$，从而 $a_1=2$.

$n\geqslant 2$ 时，有 $2a_{n-1}=2(n-1)+S_{n-1}$，

则两式相减得 $2(a_n-a_{n-1})=2+a_n(n\geqslant 2)$.

整理得 $a_n=2a_{n-1}+2$，

从而 $a_n+2=2(a_{n-1}+2)$，又 $a_1=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $b_n=2^{n+1}$. ……………………………………………………………………………（5 分）

（2）由题意，$a_n=2^{n+1}-2$，$c_n=\begin{cases}2^{\frac{n}{3}+1}-2,\ n=3k,\\ n+1,\ n\neq 3k,\end{cases}$

从而 $T_{29}=(2^2-2+2^3-2+\cdots+2^{10}-2)+(2+3+\cdots+30)-(4+7+\cdots+28)$，

从而 $T_{30}=2026+320=2346$. ……………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=my+2$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+2,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$，

则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2=4-8=-4$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 为定值 -4. ……………………………………………………（5 分）

（2）由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1}x,\\ y=x+1,\end{cases}$ 得点 D 的横坐标 $x_D=\frac{x_1}{y_1-x_1}$，

同理：点 E 的横坐标为 $x_E=\frac{x_2}{y_2-x_2}$，

于是 $|DE|=\sqrt{2}\,|x_D-x_E|=\sqrt{2}\left|\frac{x_1}{y_1-x_1}-\frac{x_2}{y_2-x_2}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{\frac{y_1^2}{4}}{y_1-\frac{y_1^2}{4}}-\frac{\frac{y_2^2}{4}}{y_2-\frac{y_2^2}{4}}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{y_1}{4-y_1}-\frac{y_2}{4-y_2}\right|$

$=4\sqrt{2}\left|\frac{y_1-y_2}{16-4(y_1+y_2)+y_1y_2}\right|=2\sqrt{2}\frac{\sqrt{m^2+2}}{|2m-1|}$，……………………………（9 分）

令 $t=2m-1$（$t\neq 0$），则 $m=\frac{t+1}{2}$，所以 $|DE|=\sqrt{2}\frac{\sqrt{t^2+2t+9}}{|t|}=\sqrt{2}\sqrt{9\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{9}\right)^2+\frac{8}{9}}\geqslant\frac{4}{3}$.

综上所述：当 $t=-9$，即 $m=-4$ 时，$|DE|$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$. ……………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题知 $f'(x)=ae^{x}-x$ 有两个不同的零点，

设 $g(x)=f'(x)=ae^{x}-x$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，$f'(x)$ 至多有一个零点，与题意不符；

当 $a>0$ 时，$g'(x)=ae^{x}-1$，令 $g'(x)=0$ 得：$x=\ln\frac{1}{a}$，

且 $x<\ln\frac{1}{a}$ 时，$g'(x)<0$，$x>\ln\frac{1}{a}$ 时，$g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 上单调递增；

由题，$g\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$ 即 $ae^{\ln\frac{1}{a}}-\ln\frac{1}{a}=1-\ln\frac{1}{a}<0$，解得：$0<a<\frac{1}{e}$.

且此时，当 $x<\ln a<\ln\frac{1}{a}$ 时，$g(x)>g(\ln a)=a^{2}-\ln a>0$，

当 $x>\ln\frac{1}{a^{2}}>\ln\frac{1}{a}$ 时，$g(x)>g\left(\ln\frac{1}{a^{2}}\right)=\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a^{2}}>0$，

因此，由零点存在定理知 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \ln\frac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\ln\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 各有一个零点，符合题意.

综上，$0<a<\frac{1}{e}$．……………………………………………………………………（5 分）

（2）由（1）可知：$ae^{x_1}=x_1$①，$ae^{x_2}=x_2$②，

因此不等式 $x_1+mx_2>m+1$ 等价于 $ae^{x_1}+mae^{x_2}>m+1$．

又①−②得：$a=\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$，代入得 $\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}(e^{x_1}+me^{x_2})>m+1$，

即 $\frac{x_1-x_2}{e^{x_1-x_2}-1}(e^{x_1-x_2}+m)>m+1$，$(x_1<x_2)$

设 $t=x_1-x_2$，不等式化为 $\frac{t}{e^{t}-1}(e^{t}+m)>m+1$，

又 $t<0$，$\therefore t(e^{t}+m)-(m+1)(e^{t}-1)<0$ 恒成立，…………………………………………（8 分）

设 $h(t)=t(e^{t}+m)-(m+1)(e^{t}-1)$，$t<0$，

$h'(t)=e^{t}(t-m)+m$，

设 $\varphi(t)=h'(t)$，$\varphi'(t)=e^{t}(t-m+1)$，$\varphi'(0)=-m+1$.

当 $m\geqslant 1$ 时，$\varphi'(t)=e^{t}(t-m+1)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减，

即 $h'(t)$ 单调递减，而 $h'(0)=0$，

$\therefore h'(t)>0$，$h(t)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递增，而 $h(0)=0$，

$\therefore h(t)<0$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上恒成立，符合题意.

当 $0<m<1$ 时，令 $\varphi'(t)=e^{t}(t-m+1)=0$ 得：$t=m-1$，

且当 $t<m-1$ 时，$\varphi'(t)<0$，当 $m-1<t<0$ 时，$\varphi'(t)>0$，

则 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,\ m-1)$ 上单调递减，在 $(m-1,\ 0)$ 上单调递增，而 $\varphi(0)=h'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $t\in(m-1,\ 0)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 在 $(m-1,\ 0)$ 上单调递减，

而 $h(0)=0$，$\therefore h(t)>0$，与题意不符.

综上所述，$m\geqslant 1$．……………………………………………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。