天一大联考
“皖豫名校联盟体”2022届高中毕业班第二次考试

理科数学·答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.

1. B	2. B	3. C	4. B	5. A	6. D
7. D	8. C	9. A	10. D	11. A	12. D

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $(0,2)$　　14. 16

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　16. [illegible]

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析　（Ⅰ）因为$S_{n+2}+S_{n+1}=2S_n+9n+6$，所以$(S_{n+2}-S_n)+(S_{n+1}-S_n)=9n+6$，…………（1分）

所以$a_{n+2}+2a_{n+1}=9n+6$，

设$\{a_n\}$的公差为d，则$3a_1+(3n+1)d=9n+6$，…………（2分）

解得$a_1=1,d=3$，…………（3分）

故$a_n=3n-2$. …………（5分）

（Ⅱ）设$\{b_n\}$的公比为q，

由$\begin{cases}b_2+b_3=2a_4,\\b_4=4a_6,\end{cases}$得$\begin{cases}b_1q+b_1q^2=20,\\b_1q^3=64,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=1,\\q=4\end{cases}$或$\begin{cases}b_1=-125,\\q=-\frac{4}{5}\end{cases}$（舍去）. …………（8分）

所以由$T_4=a_k$，得$\frac{4^4-1}{4-1}=3k-2$，解得$k=29$，

所以正整数k的值为29. …………（10分）

18. 解析　（Ⅰ）由条件及正弦定理，得$\frac{bc\sin^2A}{b^2+c^2-a^2}=\frac{3}{4}$，…………（2分）

所以$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2}{3}\sin^2A$，

再由余弦定理得$\cos A=\frac{2}{3}\sin^2A$，即$\cos A=\frac{2}{3}(1-\cos^2A)$，…………（4分）

即$2\cos^2A+3\cos A-2=0$，解得$\cos A=\frac{1}{2}$或$\cos A=-2$（舍去）.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. …………（6分）

（Ⅱ）因为$a=2\sqrt{3},A=\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$，得$b=4\sin B,c=4\sin C$. …………（7分）

又因为$B+C=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，所以$C=\frac{2\pi}{3}-B$. …………（8分）

所以$2b-c=8\sin B-4\sin C=8\sin B-4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)$

$=8\sin B-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=6\sin B-2\sqrt{3}\cos B$

$=4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B-\frac{1}{2}\cos B\right)$

$=4\sqrt{3}\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………………

因为 B、C 都为锐角，$B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，$0<B-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，$0<\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $2b-c\in(0,6)$. …………………………………………………………………………（12 分）

19. **解析**　（Ⅰ）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $CD\perp$ 平面 AA_1D_1D.

因为 $AE\subset$ 平面 AA_1D_1D，所以 $CD\perp AE$. ……………………………………………………（1 分）

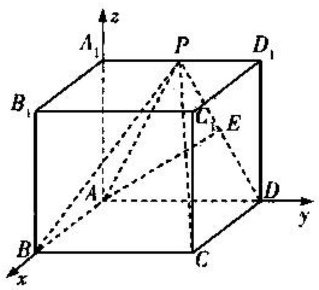
因为 $AB=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，P 是 A_1D_1 的中点，

所以 $PA=PD=\sqrt{AA_1^2+\left(\frac{1}{2}A_1D_1\right)^2}=2$，所以 $\triangle PAD$ 是等边三角形，……………………（2 分）

因为 E 是 PD 的中点，所以 $AE\perp PD$. ……………………………………………………（3 分）

因为 $PD\cap CD=D$，所以 $AE\perp$ 平面 PCD. ………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）如图所示，以 A 为原点，AB，AD，AA_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$，$C(2,2,0)$. ……………………………………………………………………（6 分）



所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2,-1,\sqrt{3})$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1=0,\\ y_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(0,-\sqrt{3},1)$. ………………………………（8 分）

设平面 PCB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y_2=0,\\ -2x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=2$，得 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},0,2)$，…………………………（9 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………………（11 分）

所以二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………………………………（12 分）

20. **解析**　（Ⅰ）由 $f(x)=x+\frac{a}{e^x}$，得 $f'(x)=1-\frac{a}{e^x}=\frac{e^x-a}{e^x}$. ……………………………………（1 分）

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值；…………………………………（2 分）

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，由 $f'(x)<0$，得 $x<\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，…………………………

所以当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得极小值，即 $f(x)_{极小值}=f(\ln a)=\ln a+1$. ……………

因此，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 没有极值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $\ln a+1$，没有极大值.

（Ⅱ）当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=a$，不满足条件；…

当 $0<a\leqslant 1$ 时，有 $\ln a\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

同样有 $f(x)_{\min}=f(0)=a$，不满足条件；……………………………………

当 $1<a<e$ 时，$0<\ln a<1$，则 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=\ln a+1=\dfrac{4}{3}$，解得 $a=\sqrt[3]{e}\in(1,e)$；

当 $a\geqslant e$ 时，$\ln a\geqslant 1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1+\dfrac{a}{e}=\dfrac{4}{3}$，可得 $a=\dfrac{e}{3}<e$，矛盾. ……………………………（11 分）

综上，$a=\sqrt[3]{e}$. ……………………………………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）由点 $A(4,2)$ 为 C 上一点，得 $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$①. ……………（1 分）

因为 $|F_1F_2|=2c$，$\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_A|=\dfrac{1}{2}\times 2c\times 2=2c=4\sqrt{3}$，

所以 $c=2\sqrt{3}$，则 $a^2-b^2=12$②. ……………………………………………（3 分）

由①②，联立解得 $a^2=24,b^2=12$，……………………………………………（4 分）

故 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{12}=1$. ……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题易知直线 l 的斜率存在.

当直线 l 的斜率为 0 时，直线 l 的方程为 $y=0$，此时 $D(-2\sqrt{6},0)$，$E(2\sqrt{6},0)$ 或 $D(2\sqrt{6},0)$，$E(-2\sqrt{6},0)$，

$|TD|\cdot|TE|=(5-2\sqrt{6})\times(5+2\sqrt{6})=1$. ……………………………………………（6 分）

当直线 l 的斜率不为 0 时，设 l 的方程为 $x=my+6$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+6,\\ \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{12}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(2+m^2)y^2+12my+12=0$，……………………（7 分）

由 $\Delta=144m^2-48(2+m^2)>0$，得 $m^2>1$，

且 $y_1+y_2=-\dfrac{12m}{2+m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{12}{2+m^2}$. ……………………………………………（8 分）

当直线 AP 的斜率不存在时，可得 $P(4,-2)$，此时 $m=1$，不符合题意，同理 AQ 的斜率也存在.

故直线 AP 的方程为 $y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1-4}(x-4)$，则 $D\left(\dfrac{4y_1-2x_1}{y_1-2},0\right)$，即 $D\left(\dfrac{(4-2m)y_1-12}{y_1-2},0\right)$，

同理 $E\left(\dfrac{(4-2m)y_2-12}{y_2-2},0\right)$. ……………………………………………（9 分）

则 $|TD|\cdot|TE|=\left|5-\dfrac{(4-2m)y_1-12}{y_1-2}\right|\left|5-\dfrac{(4-2m)y_2-12}{y_2-2}\right|$ ……………………（10 分）

$$=\left|\frac{(1+2m)^2y_1y_2+2(1+2m)(y_1+y_2)+4}{y_1y_2-2(y_1+y_2)+4}\right|$$

$$=\left|\frac{(1+2m)^2\cdot\dfrac{12}{2+m^2}-2(1+2m)\cdot\dfrac{12m}{2+m^2}+4}{\dfrac{12}{2+m^2}+2\times\dfrac{12m}{2+m^2}+4}\right|$$ ……………………（11 分）

$$=\left|\frac{4m^2+24m+20}{4m^2+24m+20}\right|=1,$$

故$|TD|\cdot|TE|$为定值1.

22. **解析** (Ⅰ)若$a=1$,则$f(x)=3x-2\ln x-1$,$f'(x)=3-\dfrac{2}{x}$.

设曲线$y=f(x)$与直线$y=kx+1$相切于点$(x_0,f(x_0))$,

则$f(x_0)=kx_0+1$,即$3x_0-2\ln x_0-1=\left(3-\dfrac{2}{x_0}\right)x_0+1$,

得$x_0=1$,所以$k=3-\dfrac{2}{1}=1$.

(Ⅱ)因为不等式[illegible]对任意$x\in[0,+\infty)$恒成立,

所以$e^x+2a[\ln(x+1)-x]-(x+1)\geq 0$对任意$x\in[0,+\infty)$恒成立.

令$\varphi(x)=e^x+2a[\ln(x+1)-x]-(x+1)$,则$\varphi'(x)=e^x+\dfrac{2a}{x+1}-(2a+1)$.

设$h(x)=e^x-x-1$,则$h'(x)=e^x-1$,

当$x<0$时,$h'(x)<0$,当$x>0$时,$h'(x)>0$,所以$h(x)\geq h(0)=0$,即$e^x\geq x+1$,

从而有$\varphi'(x)=e^x+\dfrac{2a}{x+1}-(2a+1)\geq x+1+\dfrac{2a}{x+1}-(2a+1)=\dfrac{x(x+1-2a)}{x+1}$. (8分)

①当$a\leq\dfrac{1}{2}$时,$\varphi'(x)\geq 0$在$[0,+\infty)$上恒成立,$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

所以$\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$恒成立; (9分)

②当$a>\dfrac{1}{2}$时,因$e^x\geq x+1$,即有$e^{-x}\geq 1-x$,则有$x\in[0,1)$时,$e^x\leq\dfrac{1}{1-x}$恒成立,

当$x\in[0,1)$时,$\varphi'(x)=e^x+\dfrac{2a}{x+1}-(2a+1)\leq\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2a}{1+x}-(2a+1)=\dfrac{(2a+1)x}{1-x^2}\left(x-\dfrac{2a-1}{2a+1}\right)$,

而$\dfrac{2a-1}{2a+1}\in(0,1)$,当$x\in\left(0,\dfrac{2a-1}{2a+1}\right)$时,$\varphi'(x)<0$,

于是$\varphi(x)$在$\left(0,\dfrac{2a-1}{2a+1}\right)$上为减函数,$\varphi(x)<\varphi(0)=0$,与已知矛盾. (11分)

综上可得,实数a的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。