“天一大联考·皖豫名校联盟”2023 届高中毕业班第三次考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　由题意得,$M=\{y|y\geqslant 1\}$,$N=\left\{x\left|y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}\right.\right\}=\{x|0<x\leqslant 2\}$,所以 $M\cap N=[1,2]$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查复数的几何意义.

解析　因为 $|z|-|z_0|\leqslant|z-z_0|=\sqrt{2}$,所以 $|z|-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}$,所以 $|z|\leqslant 2\sqrt{2}$,所以 $|z|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

3. 答案　D

命题意图　本题考查向量的数量积.

解析　根据题意可知 $\overrightarrow{OP_1}=(\sqrt{3},1)$,$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP_1}=1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 1=2\sqrt{3}$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查概率的计算.

解析　现从所有作品中任取一件,则取到获奖作品的概率为 $P=\dfrac{3}{5}\times 0.6+\dfrac{1}{5}\times 0.2+\dfrac{1}{5}\times 0.1=0.42$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查函数模型的应用.

解析　当 $U=0.78$ 时,$I=10^{-13}\left(e^{\frac{0.78}{0.026}}-1\right)=10^{-13}(e^{30}-1)=10^{-13}[(e^5)^6-1]>10^{-13}\cdot 10^6=10^{-7}$,所以二极管开通;当 $U=-0.78$ 时,$|I|=\left|10^{-13}\left(e^{\frac{-0.78}{0.026}}-1\right)\right|=|10^{-13}(e^{-30}-1)|<10^{-13}<10^{-7}$,所以二极管关断.

6. 答案　B

命题意图　本题考查几何体的表面积.

解析　根据题意,上部分圆锥的母线长为 $\sqrt{3\ 000^2+1\ 600^2}=3\ 400(\text{mm})$,所以圆锥的侧面积为 $\dfrac{1}{2}\times 3\ 400\times 2\pi\times 1\ 600=5.44\times 10^6\pi(\text{mm}^2)$,下部分圆柱的侧面积为 $2\pi\times 1\ 600\times 4\ 000=1.28\times 10^7\pi(\text{mm}^2)$,所以该整流罩的外表面的面积约为 $1.824\times 10^7\pi\ \text{mm}^2$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查三角恒等变换.

解析　$\because \sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-7\sin\left[\dfrac{\pi}{2}+\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=5\sqrt{2}$,$\therefore \sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-7\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=5\sqrt{2}$,

即 $5\sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{10}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=5\sqrt{2}$,令 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,$\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$,

则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=1$,$\therefore 2\alpha+\dfrac{\pi}{4}-\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore 2\alpha=\theta+2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \sin 2\alpha=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{-6\sqrt{2}}{10}\right)=-\frac{3}{5}$,故 $\tan\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}=2$.

8. 答案　A

命题意图　本题考查抛物线的性质及直线与抛物线的位置关系.

解析　设 $M\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$,$N\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$,直线 MN 为 $x=my+n$,联立抛物线 C 的方程得 $y^2-2pmy-2pn=0$,所以 $y_1+y_2=2pm$,$y_1y_2=-2pn$. 又 $OM\perp ON$,所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)\cdot\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+y_1y_2=0$,所以 $y_1y_2=-4p^2$,所以 $-4p^2=-2pn$,所以 $n=2p$,所以直线 MN 的方程为 $x=my+2p$,所以直线 MN 过定点 $P(2p,0)$,故 $2p=8$,即 $p=4$,所以 $y_1y_2=-64$. 由抛物线的方程可得 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{64}=64$,所以 $x_1+2x_2\geqslant 2\sqrt{2x_1x_2}=2\sqrt{2\times 64}=16\sqrt{2}$,当且仅当 $x_1=2x_2=8\sqrt{2}$ 时取等号.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 答案　BD

命题意图　本题考查二项式定理.

解析　令 $x=0$,则 $a_0=n-1=5$,$n=6$,故 A 错误;令 $x=1$,则 $a_0+a_1+\cdots+a_6=3^2+3^3+\cdots+3^6=\frac{3^7-9}{2}$,故 B 正确;$a_2=2^2\cdot(C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2)=4\times C_7^3=4\times 35=140$,故 C 错误;$a_6=C_6^6 2^6=64$,故 D 正确.

10. 答案　ABC

命题意图　本题考查线面位置关系、几何体的体积及线面角.

解析　因为 $AB/\!/CD$,$CD\subset$ 平面 PCD,$AB\not\subset$ 平面 PCD,所以 $AB/\!/$ 平面 PCD,故 A 正确;平面 $ABCD\perp$ 平面 APB,且 $BC\perp AB$,所以 $BC\perp PA$,又 $PA\perp PB$,$BC\cap PB=B$,从而 $AP\perp$ 平面 PBC,所以 $AP\perp BG$,故 B 正确;易知 $AP\perp PC$,所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的直径为 AC,所以 $AC=4$,所以 $AB=2\sqrt{2}$,所以 $AP=\sqrt{2}$,因为 $AP\perp$ 平面 PBC,所以 $\angle ACP$ 为 AC 与平面 PBC 所成的角,所以 $\sin\angle ACP=\frac{\sqrt{2}}{4}$,故 C 正确;因为平面 $ABCD\perp$ 平面 APB,过 P 作 $PH\perp AB$,根据面面垂直的性质定理,可知 $PH\perp$ 平面 $ABCD$,因为 $PH\cdot AB=PA\cdot PB$,所以 $PH=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot AB^2\cdot PH=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,故 D 错误.

11. 答案　ACD

命题意图　本题考查双曲线的方程与性质.

解析　根据双曲线的对称性,可得 $|P_1F_1|=|P_2F_2|$,所以 $|P_2F_1|-|P_1F_1|=|P_2F_1|-|P_2F_2|=2\times 2=4$,故 A 正确;根据题意,四边形 $F_1F_2P_2P_1$ 为等腰梯形,$|F_1F_2|=8$,设 $|P_1F_1|=|P_2F_2|=t$,由余弦定理可得 $|F_1P_2|^2=|F_1F_2|^2+|F_2P_2|^2-2|F_1F_2|\cdot|F_2P_2|\cos 60^\circ$,即 $(t+4)^2=64+t^2-8t$,解得 $t=3$,所以 $|F_1P_2|^2+|F_2P_2|^2\neq|F_1F_2|^2$,故 B 错误;梯形 $F_1F_2P_2P_1$ 的高为 $3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$|P_1P_2|=8-2\times 3\times\frac{1}{2}=5$,所以四边形 $F_1F_2P_2P_1$ 的

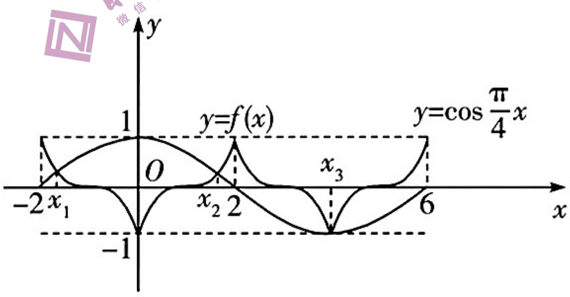
面积为$\frac{1}{2}(5+8)\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$,故 C 正确;设 $M(x_0,y_0)$,易知 $P_1\left(-\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $P_2\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

$P_3\left(-\frac{5}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,则 $k_{MP_3}\cdot k_{MP_2}=\frac{y_0+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x_0+\frac{5}{2}}\cdot\frac{y_0-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x_0-\frac{5}{2}}=\frac{y_0^2-\frac{27}{4}}{x_0^2-\frac{25}{4}}=\frac{12\left(\frac{x_0^2}{4}-1\right)-\frac{27}{4}}{x_0^2-\frac{25}{4}}=\frac{3\left(x_0^2-\frac{25}{4}\right)}{x_0^2-\frac{25}{4}}=3$,故 D 正确.

12. **答案**　AC

命题意图　本题考查函数的图象与性质及函数的零点.

解析　因为$f(x+2)$为偶函数,所以$f(x+2)=f(-x+2)$,即$f(4-x)=f(x)$,又$f(x)=g(4-2x)-g(2x)$,可得$f(2-x)+f(x)=g(4-2(2-x))-g(2(2-x))+g(4-2x)-g(2x)=0$,故$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,故 A 正确;$f(x)=-f(2-x)=-f(x+2)=-[-f(x+4)]=f(x+4)$,故$f(x)$是以 4 为周期的周期函数,根据题意,$f(0)=-1$,$f(1)=0$,$f(2)=1$,$f(3)=0$,$f(4)=-1$,故$f(2\,023)=f(4\times505+3)=f(3)=0$,故 B 错误;$(4m+1)f(4m+1)+(4m+2)f(4m+2)+(4m+3)f(4m+3)+(4m+4)f(4m+4)=(4m+1)f(1)+(4m+2)f(2)+(4m+3)f(3)+(4m+4)f(4)=4m+2+(4m+4)(-1)=-2$,其中 $m\in\mathbf{N}$,故 $\sum\limits_{k=1}^{100}[k\cdot f(k)]=100\div4\times(-2)=-50$,故 C 正确;$y=\cos\frac{\pi}{4}x$ 是周期函数,最小正周期是 8,由$\frac{\pi}{4}x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 得其对称轴为 $x=4k,k\in\mathbf{Z}$,显然$f(x)$与 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$ 的图象有公共的对称轴 $x=4k,k\in\mathbf{Z}$,方程$f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x$ 的实根是$f(x)$与 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$ 的图象的公共点的横坐标,在同一坐标系内作出$f(x)$与 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$ 在$[-2,6]$上的大致图象,如图,可知 $x_1+x_2=0$,$x_3=4$,所以 $x_1+x_2+x_3=4$,由图易知$f(x)$在$[-2,6]$,$[6,14]$,…,$[30,38]$上的三个零点之和构成首项为 4,公差为 24 的等差数列,故$f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x$ 在区间$[-2,38]$上的所有实根之和为 $5\times4+\frac{5\times4}{2}\times24=260$,故 D 错误.



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案**　$\frac{17}{2}$

命题意图　本题考查两圆的公共弦.

解析　圆 M:$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$的圆心 $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$,两圆的公共弦所在的直线的方程为 $x^2+y^2-3y-4-(x^2+y^2-m)=0$,$\therefore m-3y-4=0$,所以 $m-3\times\frac{3}{2}-4=0$,所以 $m=\frac{17}{2}$.

14. **答案**　880

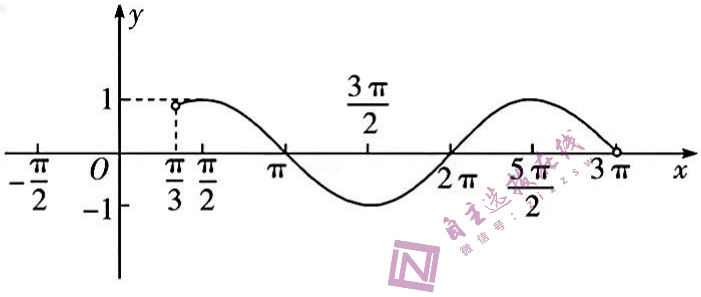
命题意图 本题考查等比数列的性质.

解析 设等比数列的公比为 $q(q>1)$，则 $440=27.5q^{48}$，所以 $q^{12}=2$，则左起第 61 个键的音的频率为 $27.5\cdot q^{60}=27.5\cdot(q^{12})^5=880(\text{Hz})$.

15. **答案** 2

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题可知 $g(x)=\sin\left(2\times\frac{\omega}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $y=\sin x,x\in\left(\frac{\pi}{3},3\pi\right)$的图象大致如图所示，要使 $g(x)$ 的图象在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有两条对称轴、两个对称中心，则 $2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{5}{3}<\omega\leqslant\frac{13}{6}$，因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$，所以 $\omega=2$.



16. **答案** $\frac{e^2-e-1}{2\ 021}$

命题意图 本题考查导数的综合应用.

解析 由题意知，存在 $x_1,x_2,\cdots,x_{2\ 023}\in[-1,1]$ 使得 $f(x_1)-g(x_1)+\cdots+f(x_{2\ 022})-g(x_{2\ 022})=f(x_{2\ 023})-g(x_{2\ 023})$成立. 令 $F(x)=f(x)-g(x)=e^{2x}-e^x-x+a,x\in[-1,1]$，则 $F'(x)=2e^{2x}-e^x-1=(2e^x+1)(e^x-1)$，当 $x\in[-1,0)$时，$F'(x)<0$，当 $x\in(0,1]$时，$F'(x)>0$，即 $F(x)$在$[-1,0)$上单调递减，在$(0,1]$上单调递增，$F(x)_{\min}=F(0)=a$，$F(1)=e^2-e-1+a$，$F(-1)=e^{-2}-e^{-1}+1+a$，则 $F(x)$的取值范围是$[a,e^2-e-1+a]$，故$f(x_i)-g(x_i)\geqslant a,i=1,2,\cdots,2\ 022$，则 $2\ 022a\leqslant f(x_{2\ 023})-g(x_{2\ 023})\leqslant e^2-e-1+a$，则 $2\ 022a\leqslant e^2-e-1+a$，故 $a\leqslant\frac{e^2-e-1}{2\ 021}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等比数列的定义及裂项相消法.

解析 (Ⅰ)因为 $a_{n+1}+a_n=4n-2$，即 $a_{n+1}-2n=-[a_n-2(n-1)]$， ……………………(2 分)

又 $a_1-2(1-1)=-3\neq0$， ……………………(3 分)

所以$\{a_n-2(n-1)\}$是首项为 -3，公比为 -1 的等比数列. ……………………(4 分)

所以 $a_n-2(n-1)=(-3)\cdot(-1)^{n-1}$，

即 $a_n=3\cdot(-1)^n+2(n-1)$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)$T_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$=3(-1+1-1+1+\cdots-1+1)+\frac{2n[0+2(2n-1)]}{2}$

$=4n^2-2n$. ……………………(6 分)

所以 $b_n=4n^2-2n+6n=4n^2+4n$. ……………………(7 分)

所以$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n^2+4n}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, ……………………………………………………… (9 分)

故数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和为$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}$. …………… (10 分)

18. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 (Ⅰ)由 $a=c-2a\cos B$ 及正弦定理得 $\sin A=\sin C-2\sin A\cos B$, ……………………………… (1 分)

因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, ………………………………… (2 分)

所以 $\sin A=\cos A\sin B-\sin A\cos B=\sin(B-A)$. ……………………………………………………… (4 分)

因为 $0<A<\pi$,$0<B<\pi$,所以 $-\pi<B-A<\pi$,

所以 $B-A=A$ 或 $B-A+A=\pi$,

即 $B=2A$ 或 $B=\pi$(舍去). ……………………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由 $4a=\sqrt{6}b$ 及正弦定理得 $4\sin A=\sqrt{6}\sin B$,

由 $B=2A$,得 $4\sin A=\sqrt{6}\sin 2A=2\sqrt{6}\sin A\cos A$,

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\sin A=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………… (8 分)

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得$\frac{3}{8}b^2=b^2+25-10b\times\frac{\sqrt{6}}{3}$,

整理得 $3b^2-16\sqrt{6}b+120=0$,解得 $b=2\sqrt{6}$或 $b=\frac{10\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………… (10 分)

当 $b=2\sqrt{6}$时,$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{2}$,

当 $b=\frac{10\sqrt{6}}{3}$时,可得 $a=c=5$,此时不满足 $B=2A$,故舍去.

综上所述,$\triangle ABC$ 的面积为 $5\sqrt{2}$. …………………………………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查相关系数及离散型随机变量的期望.

解析 (Ⅰ)由题可知

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_iy_i-20\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9\ 000}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94.$$

…… (3 分)

故可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)设 A 家庭中套中小白兔的人数为 X_1,则 $X_1\sim B\left(3,\frac{3}{10}\right)$,

所以 $E(X_1)=3\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$. ………………………………………………………………………… (6 分)

设 A 家庭的盈利为 X_2 元,则 $X_2=40X_1-60$,

所以 $E(X_2)=40E(X_1)-60=-24$. ………………………………………………………………………… (7 分)

设 B 家庭中套中小白兔的人数为 Y_1,

则 Y_1 的所有可能取值为 0,1,2,3,

$P(Y_1=0)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$,

$P(Y_1=1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{31}{72}$,

$P(Y_1=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$,

$P(Y_1=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$, ………………………………………………………………………………… (9 分)

所以 $E(Y_1)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{31}{72}+2\times\frac{5}{36}+3\times\frac{1}{72}=\frac{3}{4}$. ……………………………………………………… (10 分)

设 B 家庭的盈利为 Y_2 元,则 $Y_2=40Y_1-60$,

所以 $E(Y_2)=40E(Y_1)-60=40\times\frac{3}{4}-60=-30$. …………………………………………………… (11 分)

因为 $-24>-30$,所以 B 家庭的损失较大. ……………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查线面垂直及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)如图,设 AC,BD 交于点 O,连接 A_1O,A_1D,A_1B.

因为平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,各棱长均为 2,且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle DAB=60°$,

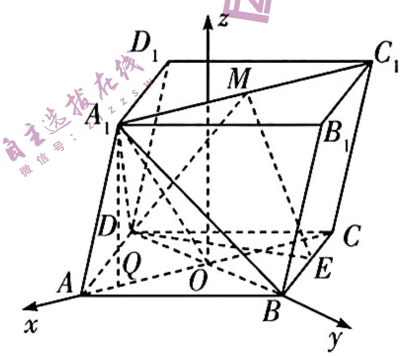
所以 $\triangle BDA_1$ 为等边三角形,四边形 $ABCD$ 为菱形,

所以 O 为 BD 的中点,$AC\perp BD$. ………………………………………………………………………………… (2 分)

所以 $A_1O\perp BD$. ……………………………………………………………………………………………………… (3 分)

因为 $A_1O\cap AC=O$,所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C. ……………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$\triangle A_1AB$,$\triangle BDA_1$ 为等边三角形,



所以 $BA_1=2$,故 $OA_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$.

解 $\triangle A_1AO$ 可得 $\sin\angle A_1AO=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\cos\angle A_1AO=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………… (5 分)

因为 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C,

所以平面 $ABCD\perp$ 平面 AA_1C_1C,

故 A_1 在平面 $ABCD$ 上的射影 Q 落在 AC 上,连接 A_1Q,

所以 $A_1Q=A_1A\sin\angle A_1AO=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,$AQ=A_1A\cos\angle A_1AO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… (6 分)

以 O 为坐标原点,OA 所在直线为 x 轴,OB 所在直线为 y 轴,过 O 与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴,建立如图所

示的空间直角坐标系.

则 $B(0,1,0)$, $C(-\sqrt{3},0,0)$, $D(0,-1,0)$, 所以 $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $M\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$, $\overrightarrow{ME}=\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$. ……………………………… (7 分)

设平面 DME 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{ME}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{2}y-\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$, 则 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{3},1,\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$. ……………………………… (9 分)

由(Ⅰ)知 $\overrightarrow{OB}$ 为平面 AA_1C_1C 的一个法向量. ……………………………… (10 分)

设平面 DME 与平面 AA_1C_1C 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OB}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{\frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{2}}\cdot 1}=\frac{2\sqrt{70}}{35}$,

故平面 DME 与平面 AA_1C_1C 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{70}}{35}$. ……………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题.

解析 (Ⅰ)依题意, $2a=2\sqrt{2}b$, 得 $a^2=2b^2$,

则椭圆 $C:\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ……………………………… (1 分)

设直线 l 的斜率为 k.

由题易知 $F(b,0)$, 故当倾斜角为 45°时, 直线 $l:y=x-b$. ……………………………… (2 分)

联立 $\begin{cases}x^2+2y^2-2b^2=0,\\ y=x-b,\end{cases}$ 可得 $3x^2-4bx=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{3}b$. ……………………………… (3 分)

故 $|PQ|=\sqrt{1+1}\cdot\left|\frac{4}{3}b-0\right|=\frac{4\sqrt{2}}{3}b=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 解得 $b=1$. ……………………………… (4 分)

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)依题意, $F'(-1,0)$, $F(1,0)$.

设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, 则 $y_1>0$, $y_2<0$.

连接 OE, 因为 O, E 分别为线段 FF', PF 的中点,

所以 $\frac{OE}{PF'}=\frac{OA}{AP}=\frac{1}{2}$,

$S_{\triangle QF'A}=S_{\triangle OQF'}+S_{\triangle OAF'}+S_{\triangle OAQ}=S_{\triangle OQF'}+\frac{1}{3}S_{\triangle POF'}+\frac{1}{3}S_{\triangle POQ}$

$=-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{6}y_1+\frac{1}{6}(y_1-y_2)=\frac{1}{3}(y_1-2y_2)$,

$\triangle PQF'$ 的面积为 $S_{\triangle PQF'}=y_1-y_2$. ……………………………… (7 分)

记$\frac{S_{\triangle QF'A}}{S_{\triangle PQF'}}=\lambda=\frac{y_1-2y_2}{3(y_1-y_2)}$，得$\frac{y_1}{y_2}=\frac{3\lambda-2}{3\lambda-1}$. ……………………………………………………………………………（8 分）

设直线 $l:x=ty+1$，与椭圆 C 的方程联立，消去 x 得$(t^2+2)y^2+2ty-1=0$，

由根与系数的关系可得 $y_1+y_2=\frac{-2t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{t^2+2}$. ……………………………………………………（9 分）

令 $y_1=my_2$，其中 $m=\frac{3\lambda-2}{3\lambda-1}$，

则$\begin{cases}m<0,\\(m+1)y_2=\frac{-2t}{t^2+2},\\my_2^2=\frac{-1}{t^2+2},\end{cases}$可得$\frac{(m+1)^2}{m}=\frac{-4t^2}{t^2+2}$. ……………………………………………………（10 分）

当 $t=0$ 时，$\frac{(m+1)^2}{m}=0$，$m=-1$，此时 $\lambda=\frac{1}{2}$.

当 $t\neq0$ 时，$\frac{(m+1)^2}{m}=\frac{-4}{1+\frac{2}{t^2}}\in(-4,0)$，所以 $-4<\frac{(m+1)^2}{m}<0$，

又 $m<0$，解得 $-3-2\sqrt{2}<m<-3+2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………（11 分）

所以 $-3-2\sqrt{2}<\frac{3\lambda-2}{3\lambda-1}<-3+2\sqrt{2}$，解得$\frac{6-\sqrt{2}}{12}<\lambda<\frac{6+\sqrt{2}}{12}$，

又因为$\frac{6-\sqrt{2}}{12}<\frac{1}{2}<\frac{6+\sqrt{2}}{12}$，

所以实数 λ 的取值范围是$\left(\frac{6-\sqrt{2}}{12},\frac{6+\sqrt{2}}{12}\right)$. ……………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查导数在求函数最值及不等式证明中的应用.

解析 （Ⅰ）依题意有 $f'(x)=\ln x-a+1$，……………………………………………………………………（1 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{a-1}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{a-1})$ 上单调递减，在 $(e^{a-1},+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………（2 分）

（ⅰ）若 $e^{a-1}\geqslant e$，即 $a\geqslant2$，则 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，则 $f(x)\in[e(1-a),-a]$，

所以 $-1=e(1-a)$，所以 $a=1+\frac{1}{e}<2$，不符合题意； ……………………………………………………（3 分）

（ⅱ）若 $e^{a-1}\leqslant1$，即 $a\leqslant1$，则 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，则 $f(x)\in[-a,e(1-a)]$，

所以 $-a=-1$，$a=1$，符合题意； ………………………………………………………………………………（4 分）

（ⅲ）若 $1<a<2$，则 $f(x)_{\min}=f(e^{a-1})=-e^{a-1}=-1$，$a=1$，不符合题意.

综上可知 $a=1$. …………………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=x(\ln x-1)$，

所以 $F(x)=f(x)-g(x)=x\ln x-x-\frac{m}{2}x^2+m$，

$F'(x)=\ln x-mx$. ………………………………………………………………………………………………（6 分）

由题意可知 x_1,x_2 是方程 $F'(x)=0$，即 $\ln x-mx=0$ 的两个根，

则 $\ln x_1=mx_1$，$\ln x_2=mx_2$，

所以 $2\ln x_1+3\ln x_2>5$ 等价于 $2mx_1+3mx_2>5$. ………………………………………………………………（7 分）

因为 $0<x_1<x_2$，所以原式等价于 $m>\dfrac{5}{2x_1+3x_2}$.

因为 $\ln x_1=mx_1$，$\ln x_2=mx_2$，

作差得 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}=m(x_1-x_2)$，即 $m=\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

所以原式等价于$\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\dfrac{5}{2x_1+3x_2}$.

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{5(x_1-x_2)}{2x_1+3x_2}$恒成立. ……………………………………………………（9 分）

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，则不等式 $\ln t<\dfrac{5(t-1)}{2t+3}$在 $t\in(0,1)$时恒成立.

令 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{5(t-1)}{2t+3}$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{25}{(2t+3)^2}=\dfrac{4t^2-13t+9}{t(2t+3)^2}$. ……………………………（10 分）

令函数 $s(t)=4t^2-13t+9$，则 $s(t)$在$(0,1)$上单调递减，

所以 $s(t)>s(1)=0$，

则 $t\in(0,1)$时，$\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增. ……………………………………………………（11 分）

又 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(t)<0$ 在$(0,1)$上恒成立，

故 $2\ln x_1+3\ln x_2>5$. ……………………………………………………………………………………（12 分）