

座位号 \_\_\_\_\_  
考号 \_\_\_\_\_  
姓名 \_\_\_\_\_  
班级 \_\_\_\_\_  
区 \_\_\_\_\_

绝密★启用前

2022—2023 学年(下)南阳六校高二年级期末考试

## 数 学

考生注意:

- 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知变量  $Y$  关于  $X$  的线性回归方程为  $Y = -0.7X + a$ ,且  $\sum_{i=1}^n x_i = 10$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i = 10$ , 则  $a$  的值为  
A. 0.5                      B. 0.4                      C. -0.4                      D. -0.5
- 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_2 = 4$ ,  $\frac{S_2 - S_3}{S_3 - S_2} = 8$ , 则  $c$   
A. 16                          B. 8                            C. 6                            D. 2
- 已知  $O$  为坐标原点,  $A(x_0, y_0)$  为一个动点, 条件  $p: O, A, B$  三点共线,  $q: A$  在抛物线  $y^2 = -x$  上, 则  $p$  是  $q$  的  
A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                                  D. 既不充分也不必要条件
- 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2, P$  为  $C$  的右支上一点, 若  $\frac{|PF_1 F_2|}{|PF_1| - |PF_2|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为  
A.  $3x \pm 2y = 0$                       B.  $2x \pm 3y = 0$                       C.  $x \pm 2y = 0$                       D.  $2x \pm y = 0$
- 给出新定义: 设  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数,  $f''(x)$  是  $f'(x)$  的导函数, 若方程  $f''(x) = 0$  有实数解  $x_0$ , 则称点  $(x_0, f(x_0))$  为  $f(x)$  的“拐点”. 已知函数  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x + \frac{1}{3}x$  的一个拐点是  $P(x_0, y_0)$ , 且  $-\frac{\pi}{4} < x_0 < 0$ , 则  $y_0 =$   
A.  $1 - \frac{\pi}{24}$                       B.  $-\frac{\pi}{24}$                       C.  $1 - \frac{\pi}{12}$                       D.  $-\frac{\pi}{12}$

数学试题 第 1 页(共 4 页)

- 已知  $F$  为抛物线  $x^2 = y$  的焦点, 点  $P_n(x_n, y_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$  在抛物线上, 若  $|P_{n+1} F| - |P_n F| = 2, x_3 = 2$ , 则  $y_{10} =$   
A. 12                                  B. 16                                  C. 18                                  D. 20
- 已知  $\frac{a}{12e} = \frac{\ln 4}{4}, \frac{b}{12e} = \frac{\ln 3}{3}, c = 12$ , 则  
A.  $a < b < c$                                   B.  $c < a < b$   
C.  $a < c < b$                                   D.  $b < a < c$
- 已知直线  $l_1: x + y + 2 = 0$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $M, N$  两点, 动直线  $l_2: y = -mx (m \in \mathbb{R})$  和  $l_1: my - x - 4m + 2 = 0$  交于点  $P$ , 则  $\triangle MNP$  的面积的最小值为  
A.  $\sqrt{10}$     B.  $5 - \sqrt{10}$   
C.  $2\sqrt{2}$     D.  $2\sqrt{10} - 3$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

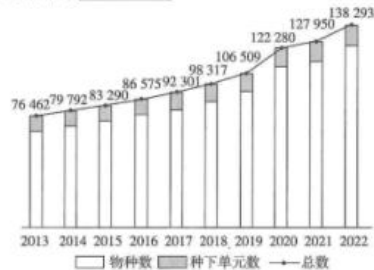
- 向量  $\pi = (-2, 3, 1)$  是平面  $\alpha$  的一个法向量, 点  $P(1, 1, 2)$  在平面  $\alpha$  内, 则下列点也在平面  $\alpha$  内的是  
A.  $(1, 1)$     B.  $(0, 0, 3)$   
C.  $(2, 3)$     D.  $(2, 1, 4)$
- 随机变量  $X$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2) (\sigma > 0)$ ,  $a$  为大于 0 的常数, 则下列结论中正确的是  
A.  $P(X \leq a) > 0.5$                                   B.  $P(X \leq -a) < P(X \geq a + 2)$   
C.  $a$  越大,  $P(-a \leq X \leq a)$  越小                                  D.  $E(aX) > EX$
- 数列  $\{a_n\}$  的每一项均为 0 或 1, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\{a_n \cdot S_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 则下列结论中正确的是  
A. 数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  的所有可能情况共有  $n^2$  种  
B.  $S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$  为定值, 则  $T_n$  恒为 0  
C. 若  $T_n - T_{n-1} (n \geq 2)$  为定值, 则  $\{a_n\}$  为常数列  
D. 数列  $\{S_n\}$  可能为等比数列
- 已知函数  $f(x) = x^3 - ax^2 - x (a \in \mathbb{R})$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数, 则下列结论中正确的是  
A.  $f(x)$  恒有一个极大值点和一个极小值点  
B. 若  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围是  $[2, +\infty)$   
C. 若  $f'(1) = 0$ , 则直线  $y = -1$  与  $f(x)$  的图象有 2 个不同的公共点  
D. 若  $a = 3$ , 则  $f(f'(x))$  有 6 个不同的零点

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

- 若  $(a - \frac{1}{2}x)^3$  的展开式中  $x^2$  的系数为 20, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_。

数学试题 第 2 页(共 4 页)

14. 如图是《中国生物物种名录》中记载的 2013—2022 年中国生物物种及种下单元的数量变化图,从中依次不重复地抽取两个年份的数据进行研究,则在第一次抽到的年份对应的物种及种下单元的总数超过 90 000 的条件下,第二次抽到的年份对应的物种及种下单元的总数也超过 90 000 的概率为\_\_\_\_\_.



15. 已知正项数列  $\{a_n\}$  是公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = \frac{n}{2}$ . 若满足  $a_n > b_n$  的正整数  $n$  恰有 3 个,则  $a_1$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + e^x - \frac{1}{e}$ ,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数,若  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 不等式  $(3a^2 - 2a - 1) \leq f'(x) + 2x - 1$  恒成立,则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_{12} = 78, a_3 = 4a_2$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

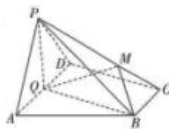
(II) 若  $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (12 分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ , 且  $AD \perp DC$ , 平面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $\triangle PAD$  是边长为 2 的等边三角形,  $BC = 1, CD = \sqrt{3}, Q$  为  $AD$  的中点,  $M$  是棱  $PC$  上靠近点  $C$  的三等分点.

(I) 求证:  $PQ \perp CD$ ;

(II) 求二面角  $A-QB-M$  的平面角的余弦值.



19. (12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{3}, g(x) = a \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} - ax, a \in (-\infty, -1)$ .

(I) 求  $g(x)$  的单调区间;

(II) 若  $g(x)_{\max} = f(x)_{\min} + b$ , 求实数  $b$  的取值范围.

20. (12 分)

淄博烧烤走红契合了公众“说走就走”的情绪. 美食也是生活,更是社会情绪的折射. 随着城市间人口流动的日益频繁,给自己一个说走就走的旅行,是当下很多年轻人的选择. 为了解年轻人对淄博烧烤的态度,随机调查了 200 位年轻人,得到的统计数据如下面的不完整的  $2 \times 2$  列联表所示(单位:人):

	非常喜欢	感觉一般	合计
男性		$a$	
女性	$2a$		100
合计		70	

(I) 求  $a$  的值,并判断是否有 95% 的把握认为年轻人对淄博烧烤的态度与性别有关.

(II) 从样本中筛选出 4 名男性和 3 名女性共 7 人作为代表,这 7 名代表中有 2 名男性和 2 名女性非常喜欢淄博烧烤. 现从这 7 名代表中任选 3 名男性和 2 名女性进一步交流,记  $\xi$  为这 5 人中非常喜欢淄博烧烤的人数,求  $\xi$  的分布列及数学期望  $E\xi$ .

参考公式:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a+b+c+d$ .

参考数据:

$P(\chi^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.01
$k_0$	2.706	3.841	6.635

21. (12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 坐标原点  $O$  到直线  $AB$  的距

离为  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,  $\triangle AOB$  的面积为  $\frac{3}{2}$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 若过点  $(1, 0)$  且不与  $x$  轴重合的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 直线  $AM, AN$  分别与  $y$  轴交于  $P, Q$  两点, 证明:  $|OP| \cdot |OQ|$  为定值.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x^n + 2e^{x-1} - 2x + m (m \in \mathbb{R})$ .

(I) 当  $m = 2$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq mx$  在  $[1, +\infty)$  上恒成立, 求  $m$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：  
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线