绝密★启用前

2024年普通高等学校全国统一模拟招生考试
高三10月联考
数 学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生号　　班级　　姓名

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $z=a+\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，若 $z\mathrm{i}+\bar{z}=0$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

2. 设集合 $A=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{y|y=2^x+2\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|x\geqslant 1\}$　　C. $\{x|x\geqslant 2\}$　　D. $\{x|x>2\}$

3. 设 $a=\log_2 3$，$b=\frac{3}{2}$，$c=\log_{0.2}0.3$，则

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

4. 设 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-f'(0)x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为

A. $y=-x+1$　　B. $y=-2x+1$　　C. $y=2x+1$　　D. $y=x+1$

5. 设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，若 $(\sin\theta+\cos\theta)^2+\sqrt{3}\cos 2\theta=3$，则 $\sin 2\theta=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，F 是 CD 的中点，DE 与 BF 相交于点 G，则 $\overrightarrow{AG}=$

A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

7. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a^2+2ab+b^2=c^2+2$，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，则 $\cos C=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3, x\leqslant 0,\\(x-2)^2, x>0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=[f(x)]^2-f[f(x)]$ 的所有零点之和为

A. 2　　B. 3　　C. 0　　D. 1

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面上的单位向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则

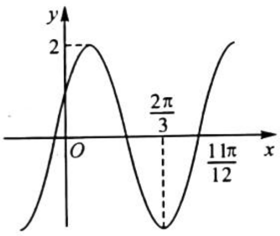
A. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{3}{5}$

B. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

D. 向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{5}\boldsymbol{a}$

10. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. 将曲线 $y=f(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称

D. 若 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 上单调递增，则 $0<a\leqslant\frac{\pi}{6}$

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x-1)+f(x)+f(x+1)=0$，则

A. $f(x)$ 的一个周期为 3　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称

C. $f(1)=0$　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2022}f(k)=0$

12. 已知 $a>0$，设函数 $f(x)=\ln x-\frac{a(x^2-1)}{x^2+1}$，则下列说法正确的是

A. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在定义域上单调递增

B. 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个极值点

C. 若 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的极值点，则 $x_1x_2=1$

D. 若 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f(x_1)+f(x_2)=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 在△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $b=a+2,c=a+4,C=120^\circ$，则 $a=$________．

14. 写出同时满足如下三个条件的一个函数解析式 $f(x)=$________．

①$f(x)$ 为偶函数；②$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；③$f(x)$ 的值域为 $[0,1]$

15. 已知正实数 a,b 满足 $a^2+b^2=1$，则 $\left(4a+\frac{1}{2a}\right)\left(4b+\frac{1}{2b}\right)$ 的最小值为________．

16. 设 $f(x)=ae^{3x}-3x^2+x\ln x+x$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a 的取值范围是________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤．

17.（本小题满分 10 分）

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$B-A=\frac{\pi}{4}$，$4b=3\sqrt{2}a$．

(1)求 $\tan A$；

(2)若 $c=\sqrt{2}$，求△ABC 的外接圆的面积．

18.（本小题满分 12 分）

设命题 p："对任意 $x>1$，$x^2-(a+1)x+a+1\geqslant 0$ 恒成立"．且命题 p 为真命题．

(1)求实数 a 的取值集合 A；

(2)在(1)的条件下，设非空集合 $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant m^2-1\}$，若"$\lambda\in B$"是"$\lambda\in A$"的充分条件，求实数 m 的取值范围．

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x+1)(x-a)^2$，其中 $a\geqslant -1$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a>-1$ 时，设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 的极大值点和极小值点，且点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，若直线 AB 在 y 轴上的截距大于 $\frac{4(a+1)}{3}$，求 a 的取值范围．

20.（本小题满分 12 分）

记函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega\in\mathbf{N}^*,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为 T.

(1)若 $f(T)=1$，且直线 $x=\frac{\pi}{6}$为 $f(x)$的图象的一条对称轴，求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$；

(2)若$\frac{\pi}{3}$为 $f(x)$的一个零点，且 $f(x)$在区间$(0,\pi)$上至多有两个零点，求 T.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\log_2 x+\log_x 4(x>1)$，$g(x)=4^x+4^{-x}-a\cdot 2^x-a\cdot 2^{-x}+1$.

(1)求 $f(x)$的最小值；

(2)设不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集为集合 A，若对任意 $x_1\in A$，存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $x_1=g(x_2)$，求实数 a 的值.

22.（本小题满分 12 分）

(1)证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$x-\sin x\geqslant 0$；

(2)已知函数 $f(x)=\sin x-x+ax\sin x$，$x\in[0,\pi]$，$a\in\mathbf{R}$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.

(ⅰ)当 $a>0$ 时，证明：$f'(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一的极大值点；

(ⅱ)若 $f(x)$有且仅有两个零点，求 a 的取值范围.

2024年普通高等学校全国统一模拟招生考试
高三10月联考·数学
参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	D	B	A	C	D
题号	9	10	11	12				
答案	ABD	AD	AD	ACD				

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】A

【解析】由 $zi+z=(a+i)i+a-i=(a-1)i+a-1=0$，解得 $a=1$，所以 $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$．故选A．

2.【答案】B

【解析】由 $x-1\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 1$，所以 $A=\{x|x\geqslant 1\}$，因为 $y=2^x+2>2$，所以 $B=\{y|y>2\}$，故 $A\cup B=\{x|x\geqslant 1\}$，故选B．

3.【答案】C

【解析】$c=\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$，$a=\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}=b>1$，所以 $a>b>c$，故选C．

4.【答案】D

【解析】因为 $f(0)=1$，$f'(x)=(x+2)e^x-f'(0)$，所以 $f'(0)=2-f'(0)$，所以 $f'(0)=1$，由 $f(0)=1$，$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，所以 $f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=x+1$，故选D．

5.【答案】B

【解析】因为 $(\sin\theta+\cos\theta)^2+\sqrt{3}\cos 2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta=3$，

所以 $2\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta=\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta=2$，即 $2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2$，

所以 $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$．故选B．

6.【答案】A

【解析】由 F 为 CD 的中点，E 为 BC 的中点，有 $EF\underline{\parallel}\frac{1}{2}BD$，可得 $\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{GE}$，有 $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG})$，有 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，又由 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，有 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$．故选A．

7.【答案】C

【解析】依题意，有 $a^2+b^2-c^2=2-2ab$，有 $2ab\cos C=2-2ab$，所以 $ab=\frac{1}{1+\cos C}$，设$\triangle ABC$面积为S，所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sin C}{2(1+\cos C)}=\frac{1}{4}$，有 $2\sin C=1+\cos C$，有 $4(1-\cos^2 C)=(1+\cos C)^2$，解得 $\cos C=\frac{3}{5}$ 或 $\cos C=-1$（舍去），故 $\cos C=\frac{3}{5}$．故选C．

8.【答案】D

【解析】不妨设 $f(x)=t$，则 t 为方程 $t^2=f(t)$ 的解.

当 $t>0$ 时，$t^2=(t-2)^2$，解得 $t=1$；当 $t\leqslant 0$ 时，$t^2=2t+3$，解得 $t=-1$.

当 $t=1$ 时，$f(x)=1$ 的解为 $-1,1,3$；当 $t=-1$ 时，$f(x)=-1$ 的解为 -2.

所以 $g(x)$ 的所有零点之和为 $-1+1+3+(-2)=1$. 故选 D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】ABD

【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，

即 $2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{5}$，A 选项正确；

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，B 选项正确；

$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，C 选项错误；

向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}]\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}=(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}$，D 选项正确. 故选 ABD.

10.【答案】AD

【解析】因为 $\frac{T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2\omega}$，所以 $\omega=2$，$T=\pi$，故 A 正确；

由 $A=2$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-2$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故 B 错误；

由 A，B 选项可知，$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，所得函数 $g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=$

$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$ 的图象关于原点对称，C 选项错误；

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，故 $0<a\leqslant\frac{\pi}{6}$，D 选项正确. 故选 AD.

11.【答案】AD

【解析】由 $f(x-1)+f(x)+f(x+1)=0$ 可知 $f(x)+f(x+1)+f(x+2)=0$，所以 $f(x-1)=f(x+2)$，即 $f(x)=f(x+3)$，$f(x)$ 的一个周期为 3，A 选项正确；

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=f(x+3)=-f(-x)$，即 $f(x+3)+f(-x)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 对称，B 选项错误；

因为 $f(x+3)+f(-x)=0$，令 $x=-1$，则 $f(2)+f(1)=0$，$f(1)$ 的大小不能确定，C 选项错误；

由于 $f(1)+f(2)=0$，$f(0)=f(3)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)=0$，由于 $f(x)$ 的一个周期为 3，且 $2022=3\times 674$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{2022}f(k)=0$，D 选项正确. 故选 AD.

12.【答案】ACD

【解析】$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4ax}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+(2-4a)x^2+1}{(x^2+1)^2x}$.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2x}=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2x}\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增，A 选项正确；

当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，设 $t=x^2$，即 $t^2+(2-4a)t+1=0$，$\Delta=(2-4a)^2-4=16a^2-16a=16a(a-1)<0$，所以 $t^2+(2-4a)t+1>0$，$f(x)$ 无极值点，B 选项错误；

由 B 选项可知，$a>1$ 时，$t^2+(2-4a)t+1=0$ 存在两个正实数根，$f(x)$ 存在两个极值点，所以 $x_1^2x_2^2=1$，即 $x_1x_2=1$，C 选项正确；

$$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=\ln x_1-a\frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}+\ln\frac{1}{x_1}-a\frac{\frac{1}{x_1^2}-1}{\frac{1}{x_1^2}+1}=\ln\left(x_1\cdot\frac{1}{x_1}\right)-a\frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}+a\frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}=$$

0，D 选项正确，故选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】3

【解析】由余弦定理有 $c^2=a^2+b^2+ab$，有 $(a+4)^2=a^2+(a+2)^2+a(a+2)$，整理为 $a^2-a-6=0$，解得 $a=3$ 或 $a=-2$（舍去），故 $a=3$.

14.【答案】$|\sin x|$ 或 $|\cos x|$ 或 $\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2|x|}{x^2+1}$，$\frac{e|x|}{e^{|x|}}$（答案不唯一）

【解析】考虑三角函数或过点 $(0,0)$，极大值为 1 的函数.

15.【答案】12

【解析】因为 $a^2+b^2=1\geqslant 2ab$，所以 $0<ab\leqslant\frac{1}{2}$，

$$\left(4a+\frac{1}{2a}\right)\left(4b+\frac{1}{2b}\right)=16ab+\frac{1}{4ab}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}=16ab+\frac{1}{4ab}+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}=16ab+\frac{9}{4ab}\geqslant 2\sqrt{16ab\cdot\frac{9}{4ab}}=12，$$

当且仅当 $ab=\frac{3}{8}$ 时等号成立.

16.【答案】$\left[\frac{\ln 3}{3e},+\infty\right)$

【解析】由题意，$f(x)=ae^{3x}-3x^2+x\ln x+x\geqslant 0$，即 $\frac{ae^{3x}}{x}-3x+\ln x+1\geqslant 0$，

即 $ae^{3x-\ln x}-3x+\ln x+1\geqslant 0$，设 $t=g(x)=3x-\ln x$，则 $g'(x)=3-\frac{1}{x}=\frac{3x-1}{x}$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$g(x)$ 取得极小值 $g\left(\frac{1}{3}\right)=1+\ln 3$，所以 $ae^t-t+1\geqslant 0$ 对任意 $t\geqslant 1+\ln 3$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{t-1}{e^t}$，

设 $h(t)=\frac{t-1}{e^t}$，则 $h'(t)=\frac{2-t}{e^t}$，$h(t)$ 在 $[1+\ln 3,+\infty)$ 上单调递减，所以 $a\geqslant h(1+\ln 3)=\frac{\ln 3}{3e}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.【答案】(1)2　(2)25π

【解析】(1)由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，有 $4\sin B=3\sqrt{2}\sin A=4\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，……………………………… 2 分

即 $3\sqrt{2}\sin A=2\sqrt{2}\sin A+2\sqrt{2}\cos A$，解得 $\tan A=2$；……………………………………………… 4 分

(2)$\tan B=\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan A+1}{1-\tan A}=\frac{2+1}{1-2}=-3$，……………………………………………………… 5 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\tan C=\tan[\pi-(B+A)]=-\tan(A+B)=-\frac{2-3}{1-(-6)}=\frac{1}{7}$，……………… 6 分

由 $\tan C=\frac{1}{7}$ 可知 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin C=\frac{1}{5\sqrt{2}}$，所以 $\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{5\sqrt{2}}}=2R$，…………………………… 9 分

解得 $R=5$，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 25π. ……………………………………………

18.【答案】(1)$A=\{a|a\leqslant 3\}$　(2)$\{m|m=2$ 或 $-2\leqslant m\leqslant -1\}$

【解析】(1)$f(x)=x^2-(a+1)x+a+1\geqslant 0$ 恒成立，即 $x^2-x+1\geqslant a(x-1)$，

即 $a\leqslant\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ 对任意 $x>1$ 恒成立，…… 2 分

$a\leqslant\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+1+x-1+1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1$，…… 5 分

因为 $x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\geqslant 2\sqrt{(x-1)\times\dfrac{1}{x-1}}+1=3$（当且仅当 $x=2$ 时取"="），所以 $a\leqslant 3$，

综上，a 的取值集合为 $A=\{a|a\leqslant 3\}$；…… 7 分

(2)依题意，$m^2-1\geqslant m+1$，解得 $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -1$，…… 9 分

因为"$\lambda\in B$"是"$\lambda\in A$"的充分条件，所以 $m^2-1\leqslant 3$，解得 $-2\leqslant m\leqslant 2$，…… 11 分

所以 m 的取值范围为 $\{m|m=2$ 或 $-2\leqslant m\leqslant -1\}$．…… 12 分

19.【答案】(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a-2}{3}\right)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-2}{3},a\right)$ 上单调递减　(2)$a>2$

【解析】(1)$f'(x)=(x-a)^2+2(x+1)(x-a)=(x-a)(3x+2-a)$，

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=3(x+1)^2\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；…… 2 分

当 $a>-1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$ 或 $x=\dfrac{a-2}{3}$，

所以当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{a-2}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{a-2}{3},a\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，…… 4 分

综上，当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a-2}{3}\right)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-2}{3},a\right)$ 上单调递减；…… 6 分

(2)由(1)知，当 $a>-1$ 时，$x_1=\dfrac{a-2}{3}$，$x_2=a$，且 $f(x_2)=0$，

则直线 AB：$y-f(x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2)$，…… 8 分

令 $x=0$，则 $y=\dfrac{f(x_1)}{x_1-a}\cdot(-a)=\dfrac{\dfrac{a+1}{3}\left(-\dfrac{2a+2}{3}\right)^2}{-\dfrac{2a+2}{3}}\cdot(-a)=\dfrac{2a(a+1)^2}{9}$，…… 10 分

依题意，$\dfrac{2a(a+1)^2}{9}>\dfrac{4(a+1)}{3}$，由 $a+1>0$ 可化为 $a^2+a-6>0$，解得 $a>2$，

所以 a 的取值范围是 $a>2$．…… 12 分

20.【答案】(1)1　(2)$T=2\pi$

【解析】(1)因为 $f(T)=f\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right)=2\cos\varphi=1$，且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，…… 2 分

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=2\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，…… 3 分

因为 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 $\dfrac{\omega\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{N}^*)$，……

所以 $\omega=6k-2(k\in\mathbf{N}^*)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=1$；…………………………………………… 6 分

(2)由 $\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的一个零点，可知 $\frac{\omega\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，…………………………………………… 7 分

又 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至多有两个零点，所以 $\omega\pi+\varphi\leqslant\frac{5}{2}\pi$，…………………………………………… 8 分

由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，有 $\omega\pi\leqslant\frac{5}{2}\pi$，可得 $0<\omega\leqslant\frac{5}{2}$，又由 $\omega\in\mathbf{N}^*$，可得 $\omega=1$ 或 2，…………………………… 9 分

①当 $\omega=1$ 时，$f(x)=2\cos(x+\varphi)$，又由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，由 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+\varphi<\frac{5}{6}\pi$，

有 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，有 $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，在区间 $(0,\pi)$ 内有一个零点 $x=\frac{\pi}{3}$，符合题意；……… …………………………………………………………………………………… 10 分

②当 $\omega=2$ 时，$f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，又由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，由 $\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{7}{6}\pi$，没有满足条件的 φ，…………………………………………………………………………………… 11 分

由上知 $\omega=1$，$T=2\pi$. …………………………………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)$2\sqrt{2}$　(2)$\frac{1}{2}$

【解析】(1)$x>1$ 时，$\log_2 x>0$，所以 $f(x)=\log_2 x+\log_x 4=\log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}\geqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\log_2 x=\frac{2}{\log_2 x}$，即 $x=2^{\sqrt{2}}$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$；………………………………… 4 分

(2)$f(x)=\log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}\leqslant 3$，即 $(\log_2 x)^2-3(\log_2 x)+2\leqslant 0$，

解得 $1\leqslant\log_2 x\leqslant 2$，即 $2\leqslant x\leqslant 4$，故 $A=[2,4]$，…………………………………………………… 6 分

设 $t=2^x+2^{-x}$，则当 $x\in[0,1]$，即 $2^x\in[1,2]$ 时，由对勾函数的性质可知 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，

而 $g(x)=(2^x+2^{-x})^2-a(2^x+2^{-x})-1=t^2-at-1$，

设 $h(t)=t^2-at-1$，则由题意得 $A=[2,4]$ 为当 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 时，$h(t)$ 的值域的子集. …………………… 8 分

1°当 $\frac{a}{2}\leqslant 2$，即 $a\leqslant 4$ 时，易知 $h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递增，故 $\begin{cases}h(2)=3-2a\leqslant 2,\\ h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{4}-\frac{5}{2}a\geqslant 4,\end{cases}$ 得 $a=\frac{1}{2}$；……… 9 分

2°当 $2<\frac{a}{2}<\frac{5}{2}$，即 $4<a<5$ 时，$h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上的最大值即 $h(2)$ 和 $h\left(\frac{5}{2}\right)$ 中的较大值，

令 $h(2)=3-2a\geqslant 4$ 得 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，令 $h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{4}-\frac{5}{2}a\geqslant 4$ 得 $a\leqslant\frac{1}{2}$，而 $4<a<5$，故不合题意；…… 11 分

3°当 $\frac{5}{2}\leqslant\frac{a}{2}$，即 $5\leqslant a$ 时，易知 $h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递减，故 $\begin{cases}h(2)=3-2a\geqslant 4,\\ h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{4}-\frac{5}{2}a\leqslant 2,\end{cases}$ 不等式组无解.

综上所述：实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………… 12 分

22.【答案】(1)略　(2)(ⅰ)略　(ⅱ)$a>0$

【解析】(1)证明：设 $F(x)=x-\sin x$，则 $F'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，…… 2 分

所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$，即 $x-\sin x\geqslant 0$ 成立；………………………………………………

(2)(ⅰ)证明：当 $a>0$ 时，$f'(x)=\cos x-1+a(\sin x+x\cos x)$，$f'(0)=0$，

设 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=-\sin x+a(2\cos x-x\sin x)$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$-\sin x$ 单调递减，$2\cos x$ 单调递减，$-x\sin x$ 单调递减，所以 $g'(x)$单调递减，…… 5 分

因为 $g'(0)=2a>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-\frac{\pi}{2}a<0$，所以存在 $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'(x)=0$，

所以当 $x\in(0,x_1)$时，$g'(x)>0$，$f'(x)$单调递增，

当 $x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，$f'(x)$单调递减，

所以 $f'(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一的极大值点；…………………………………………………… 7 分

(ⅱ)当 $a\leqslant 0$ 时，由(1)知，$x-\sin x\geqslant 0$，所以 $f(x)\leqslant ax\sin x\leqslant 0$，

$f(x)$只有一个零点，不符合题意；……………………………………………………………………………… 8 分

当 $a>0$ 时，且 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$-\sin x\leqslant 0$，$2\cos x-x\sin x<0$，所以 $g'(x)<0$，

$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减，又 $g(0)=0$，$g(\pi)=-2-a\pi<0$，结合(ⅰ)可知，

存在 $x_2\in(0,\pi)$，使得 $g(x)=0$，………………………………………………………………………… 10 分

所以当 $x\in(0,x_2)$时，$g(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当 $x\in(x_2,\pi)$时，$g(x)<0$，$f(x)$单调递减，

又 $f(0)=0$，$f(\pi)=-\pi$，所以存在 $x_3\in(x_2,\pi)$，使得 $f(x)=0$，

$f(x)$有且仅有两个零点，满足题意.

综上，a 的取值范围是 $a>0$. ……………………………………………………………………………… 12 分

关于我们