高三数学试卷参考答案(理科)

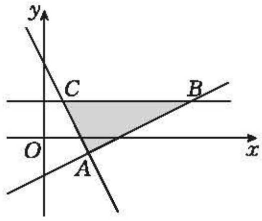
1. B　由题意可得 $A=\{x|-2<x<4\}$,$B=\{x|x>-1\}$,则 $A\cap B=\{x|-1<x<4\}$.

2. D　复数范围内方程 $x^2+4x+5=0$ 的根为 $x=-2\pm\mathrm{i}$. 因为复数 z 在复平面内对应的点位于第三象限,所以 $z=-2-\mathrm{i}$,则 $\overline{z}=-2+\mathrm{i}$.

3. C　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8-6m=-10$,则 $m=3$,所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

4. C　因为 $m\perp\alpha$,$l\subset\alpha$,所以 $l\perp m$. 又 $\alpha\perp\beta$,所以 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$. 故选 C.

5. D　设参加体检的人数是 n,则 $\frac{4}{5}n-\frac{1}{5}n=72$,解得 $n=120$.



6. C　画出可行域,如图所示,且 $A(\frac{6}{5},-\frac{2}{5})$,$B(4,1)$,$C(\frac{1}{2},1)$,$\frac{y}{x}$表示的是可行域内的点与原点 $O(0,0)$ 连线的斜率,故$\frac{y}{x}\in[-\frac{1}{3},2]$.

7. A　因为 $f(x-1)$ 为偶函数,所以 $f(x-1)$ 的图象关于 y 轴对称,则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称. 因为 $f(x)$ 在$[-1,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)$ 在$(-\infty,-1]$上单调递减. 因为 $f(1-2^x)<f(-7)$,所以 $-7<1-2^x<5$,解得 $x<3$.

8. A　由 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-3$,解得 $\tan\alpha=2$,则 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$,则 $\tan\beta=\tan[(2\alpha+\beta)-2\alpha]=\frac{\tan(2\alpha+\beta)-\tan 2\alpha}{1+\tan(2\alpha+\beta)\cdot\tan 2\alpha}=-\frac{13}{9}$.

9. D　$g(x)=f(x+\frac{\pi}{4})=2\sin[2(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{3}]=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$,令 $\pi+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $g(x)$ 的单调递增区间为$[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

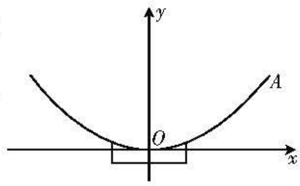
10. B　因为球 O_1 的体积为$\frac{4\pi}{3}$,所以球 O_1 的半径为 1,又球 O_1 与正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有面都相切,所以正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面内切圆的半径为 1,高为 2,则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径为 $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$,即外接球的表面积为 20π.

11. A　设$|BF_2|=x$,$|BF_1|=y$,则$\begin{cases}\frac{3}{2}y-3x=2a,\\ y-x=2a,\end{cases}$解得 $x=\frac{2a}{3}$,$y=\frac{8a}{3}$,又因为$\frac{|F_1F_2|^2+|BF_2|^2-|F_1B|^2}{2|F_1F_2||BF_2|}+\frac{|F_1F_2|^2+|AF_2|^2-|F_1A|^2}{2|F_1F_2||AF_2|}=0$,解得 $c=\sqrt{2}a$,则该双曲线的离心率为$\sqrt{2}$.

12. B　因为 $a-b=\frac{3}{301}-\frac{2}{201}=\frac{603-602}{301\times 201}=\frac{1}{301\times 201}>0$,所以 $a>b$. 设 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$,故 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$在$(0,+\infty)$上单调递增. 因为 $f(1)=0$,所以 $f(\frac{101}{100})=\ln\frac{101}{100}-\frac{2(\frac{101}{100}-1)}{\frac{101}{100}+1}=\ln\frac{101}{100}-\frac{2}{201}>f(1)=0$,即 $c>b$. 设 $g(x)=\ln x-\frac{3(x-1)}{x+2}$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{9}{(x+2)^2}=\frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)^2}$,当 $x\in(1,4)$时,$g'(x)<0$,则 $g(x)$在$(1,4)$上单调递减. 因为 $g(1)=0$,所以 $g(\frac{101}{100})=\ln\frac{101}{100}-\frac{3(\frac{101}{100}-1)}{\frac{101}{100}+2}=\ln\frac{101}{100}-\frac{3}{301}<g(1)=0$,即 $a>c$. 综上,$a>c>b$.

13. 5　因为 $f'(x)=5\cos x-3\sin x$,所以 $f'(0)=5$.

14. $\frac{27}{8}$　如图，以抛物线的顶点为坐标原点，对称轴为 y 轴，建立直角坐标系，依题意可得 A 的坐标为 $(\frac{9}{2},3)$. 设抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$，则 $\frac{81}{4}=6p$，解得 $p=\frac{27}{8}$. 故该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{27}{8}$ cm.



15. 252　先从甲、乙之外的 6 人中选取 1 人负责语言服务工作，再从剩下的 7 人中选取 2 人负责人员引导、应急救助工作，则不同的选法共有 $C_6^1A_7^2=252$ 种.

16. $(1,2)$　因为 $2c\sin(B-A)=2a\sin A\cos B+b\sin 2A$，所以 $\sin C\sin(B-A)=\sin A\sin A\cos B+\sin B\sin A\cdot\cos A$，所以 $\sin C\sin(B-A)=\sin A\sin(A+B)$，则 $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 3A}{\sin A}=\cos 2A+2\cos^2 A=4\cos^2 A-1$. 因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)$，所以 $\sin(B-A)=\sin A$，则 $B-A=A$，即 $B=2A$. 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\frac{1}{2}<\cos^2 A<\frac{3}{4}$，故 $1<4\cos^2 A-1<2$，即 $\frac{c}{a}$ 的取值范围是 $(1,2)$.

17. 解：(1)当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-1$，解得 $a_1=1$. ………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，………………………… 3 分

从而 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，………………………… 4 分

故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. ………………………… 6 分

(2)由(1)可得 $a_{n+1}=2^n$，则 $b_n=2^{n-1}+n$，………………………… 8 分

故 $T_n=(1+1)+(2+2)+(2^2+3)+\cdots+(2^{n-1}+n)$

$=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{2^{n+1}+n^2+n-2}{2}$. ………………………… 12 分

18. 解：(1)$\overline{x}=\frac{10+20+30+40+50}{5}=30$，$\overline{y}=\frac{2+3+7+8+10}{5}=6$. ………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=210$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=1000$，………………………… 4 分

则 $\hat{b}=\frac{210}{1000}=0.21$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=-0.3$. ………………………… 6 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.21x-0.3$. ………………………… 7 分

(2)将 $x=60$ 代入 $\hat{y}=0.21x-0.3$，得到 $\hat{y}=12.3$，………………………… 9 分

则估计 1000 粒赤霉素含量为 60 ng/g 的种子中后天生长苗壮的数量为 $1000\times\frac{12.3}{20}=615$. ………… 12 分

19. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$. ………………………… 1 分

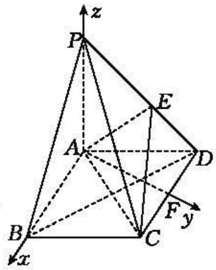
因为 $BD\perp PC$，$AC,PC\subset$ 平面 PAC，且 $AC\cap PC=C$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC. ………………………… 2 分

因为 $PA\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PA$. ………………………… 3 分

因为 $PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$，所以 $PB^2=AB^2+PA^2$，所以 $AB\perp PA$. ………………………… 4 分

因为 $AB,BD\subset$ 平面 $ABCD$，且 $AB\cap BD=B$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 5 分

(2)解:取棱 CD 的中点 F,连接 AF,易证 AB,AF,AP 两两垂直,故以 A 为原点,分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AP}$的方向为 x,y,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系.



设 $AB=2$,则 $A(0,0,0),C(1,\sqrt{3},0),D(-1,\sqrt{3},0),P(0,0,2)$,

故$\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{PD}=(-1,\sqrt{3},-2),\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$.

因为$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}$,所以$\overrightarrow{PE}=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,-2\lambda)$,则$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda)$. ………………………………………… 7 分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x+\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\lambda x+\sqrt{3}\lambda y+(2-2\lambda)z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\frac{\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda})$. ……………………………… 9 分

平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$. ……………………………………………………………… 10 分

设平面 PAB 与平面 ACE 所成的锐二面角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{3\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda+1}}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$,

整理得 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=-1$(舍去).

故存在实数 $\lambda=\frac{1}{3}$,使得平面 PAB 与平面 ACE 所成锐二面角的余弦值是$\frac{2\sqrt{19}}{19}$. ………………………… 12 分

20. 解:(1)由椭圆的对称性可知 $M_1(-2,-2),M_3(2,2),M_4(\sqrt{10},1)$在椭圆 C 上. ……………………… 1 分

由题意可得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\ \frac{10}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=6.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=-2$,则不妨令 $P(-2,2),Q(-2,-2)$.

因为 $M_3(2,2)$,所以 $k_{M_3P}=0,k_{M_3Q}=1$,故 $k_{M_3P}+k_{M_3Q}=1$. ……………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)-4,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}y=k(x+2)-4,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$ 整理得$(2k^2+1)x^2+8k(k-2)x+8k^2-32k+20=0$, ………………………… 7 分

则由 $\Delta>0$,得 $4k^2+8k-5>0,x_1+x_2=-\frac{8k(k-2)}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{8k^2-32k+20}{2k^2+1}$. ……………………… 8 分

因为 $k_{M_3P}=\frac{y_1-2}{x_1-2},k_{M_3Q}=\frac{y_2-2}{x_2-2}$,

所以 $k_{M_3P}+k_{M_3Q}=\frac{y_1-2}{x_1-2}+\frac{y_2-2}{x_2-2}=\frac{kx_1+2k-6}{x_1-2}+\frac{kx_2+2k-6}{x_2-2}$

$=\frac{(kx_1+2k-6)(x_2-2)+(kx_2+2k-6)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2kx_1x_2-6(x_1+x_2)-8k+24}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{2k(8k^2-32k+20)+6[8k(k-2)]-(8k-24)(2k^2+1)}{8k^2-32k+20+2[8k(k-2)]+4(2k^2+1)}=\frac{8(4k^2-8k+3)}{32k^2-64k+24}=1$. ……………………… 11 分

综上,直线 M_3P,M_3Q 的斜率之和是定值,且该定值为 1. …………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $a=-\frac{1}{2}$时,$f'(x)=(-\frac{1}{2}x^2-x+1)e^x-1$. ……………………………………………… 1 分

令 $g(x)=f'(x)=(-\frac{1}{2}x^2-x+1)e^x-1, x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=(-\frac{1}{2}x^2-2x)e^x<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………………………………………… 3 分

又 $g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 5 分

(2)由(1)可知当 $x>0, a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)<f(0)=1$，………………………………………………… 6 分

则当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=(ax^2+1)e^x-x\leqslant(-\frac{1}{2}x^2+1)e^x-x<1$，满足题意. …………………………… 8 分

由 $f(x)<1$，化简可得 $\frac{x+1}{e^x}-ax^2-1>0$，

令 $h(x)=\frac{x+1}{e^x}-ax^2-1, h'(x)=-\frac{x}{e^x}-2ax=-x(\frac{1}{e^x}+2a)$. ……………………………………… 9 分

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，若 $x\in(0,\ln(-\frac{1}{2a}))$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $[0,\ln(-\frac{1}{2a})]$ 上是减函数，所以当 $x\in(0,\ln(-\frac{1}{2a}))$ 时，$h(x)<h(0)=0$，不符合题意. ………………………………………………………… 10 分

当 $a\geqslant0$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以 $h(x)<h(0)=0$，不符合题意. ………… 11 分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$. …………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=1+\sqrt{2}\sin\alpha,\end{cases}$ 消去参数 α，得 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，即 $x^2+y^2-2x-2y=0$，…………… 2 分

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$. ………………………………………………… 3 分

令 $\theta=0$，则 $\rho=2$，故点 A 的极坐标为 $(2,0)$. ……………………………………………………… 5 分

(2)令 $\theta=\frac{\pi}{3}$，则 $\rho=1+\sqrt{3}$，…………………………………………………………………… 7 分

故△OAB 的面积 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. …………………… 10 分

23. 解：(1)因为 $a=2$，所以 $f(x)=|x+2|+|x-3|$.

当 $x\geqslant3$ 时，原不等式转化为 $2x-1\geqslant2x$，无解. …………………………………………………… 1 分

当 $-2<x<3$ 时，原不等式转化为 $5\geqslant2x$，解得 $-2<x\leqslant\frac{5}{2}$. ………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant-2$ 时，原不等式转化为 $-2x+1\geqslant2x$，解得 $x\leqslant-2$. ………………………………………… 3 分

综上所述，原不等式的解集为 $(-\infty,\frac{5}{2}]$. ……………………………………………………………… 5 分

(2) $|x+a|+|x-3|\geqslant|a+3|$. ……………………………………………………………………………… 7 分

由不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}a+5$ 的解集非空，可得 $|a+3|\leqslant\frac{1}{2}a+5$，……………………………………… 8 分

则 $-\frac{1}{2}a-5\leqslant a+3\leqslant\frac{1}{2}a+5$，…………………………………………………………………… 9 分

解得 $-\frac{16}{3}\leqslant a\leqslant4$，故 a 的取值范围为 $[-\frac{16}{3},4]$. ……………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。