绝密★启用前

2022届高三第一次学业质量联合检测

数　学

本试卷4页。总分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{0,2,4\}$，$B=\{x\mid -1<x<2,x\in \mathbf{Z}\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{0,1,2,4\}$　　D. $\{-1,0,1,2,4\}$

2. 设复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $1-\frac{1}{z}=$

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

3. 设顶角为36°的等腰三角形为最美三角形，已知最美三角形顶角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，则最美三角形底角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. 设圆锥的侧面展开图的圆心角为 α，轴截面的顶角为 β，若 $\alpha=\sqrt{2}\pi$，则 $\beta=$

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 现有3道四选一的单选题，学生李明对其中的2道题有思路，1道题完全没有思路.有思路的题答对的概率为0.8，没有思路的题只好任意猜一个答案，猜对答案的概率为0.25，若每题答对得5分，不答或答错得0分，则李明这3道题得分的期望为

A. $\frac{93}{10}$　　B. $\frac{37}{4}$　　C. $\frac{39}{4}$　　D. $\frac{211}{20}$

6. 在△ABC 中，$AB=2$，$BC=3$，$B=60°$，P 为边 AC 上的动点，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的取值范围是

A. $[0,3]$　　B. $[1,3]$　　C. $[6,9]$　　D. $[3,9]$

7. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，A，B 是 C 右支上的两点，且直线 AB 经过点 F_2.若 $|AF_2|=2|BF_2|$，以 F_1F_2 为直径的圆经过点 B，则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{17}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 1,\\ \log_2(x+3), x>1,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)+f(x+5)>4$ 的解集为

A. $(0,5)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(5,+\infty)$　　D. $(-5,5)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 设 $0<a<b$，且 $a+b=2$，则

A. $1<b<2$　　B. $2^{a-b}>1$　　C. $ab<1$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$，则

A. $x=\frac{\pi}{18}$是函数 $f(x)$的一个零点

B. 函数 $f\left(x-\frac{\pi}{9}\right)$是偶函数

C. 函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

D. 将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位后与原函数的图象重合

11. 抛掷一枚质地均匀的骰子，观察向上的面出现的点数，在下列事件中与事件“出现的点数为偶数”相互独立的事件为

A. “出现的点数为奇数”　　B. “出现的点数大于 2”

C. “出现的点数小于 4”　　D. “出现的点数小于 3”

12. 在三棱锥 A-BCD 中，$AB=CD=6$，$AC=BD=5$，$AD=BC=7$，M,N,P,Q 分别为棱 AB，CD，AD，BC 的中点，则

A. 直线 MN 是线段 AB 和 CD 的垂直平分线

B. 四边形 $MQNP$ 为正方形

C. 三棱锥 A-BCD 的体积为 $2\sqrt{95}$

D. 经过三棱锥 A-BCD 各个顶点的球的表面积为 55π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x)=2\sin(x+\alpha)+\cos x$ 是奇函数，则 $\sin\alpha$ 的值为________.

14. 设 $a=C_{19}^{0}+C_{19}^{1}7+C_{19}^{2}7^2+\cdots+C_{19}^{19}7^{19}$，则 a 除以 9 所得的余数为________.

15. 已知 O 为坐标原点，A，B 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$上异于点 O 的两个动点，且$\angle AOB=90^\circ$.若点 O 到直线 AB 的距离的最大值为 6，则 p 的值为________.

16. 杨辉三角是二项式系数在三角形中的一种几何排列.某校数学兴趣小组模仿杨辉三角制作了如下数表.

1　2　3　4　5　6　…
3　5　7　9　11　13　…
8　12　16　20　24　28　…
…　…　…　…　…　…

该数表的第一行是数列$\{n\}$，从第二行起每一个数都等于它肩上的两个数之和，则这个数表中第 4 行的第 5 个数为________，各行的第一个数依次构成数列 1，3，8，…，则该数列的前 n 项和 $S_n=$________.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$BC=\sqrt{3}AD$，$\angle BAD=2\angle BCD$.

(1)求$\angle BCD$；

(2)若 $AB=AD=2$，求梯形 $ABCD$ 的面积.

18.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3-(-1)^n}{2}a_n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

(1)设 $b_n=a_{2n-1}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

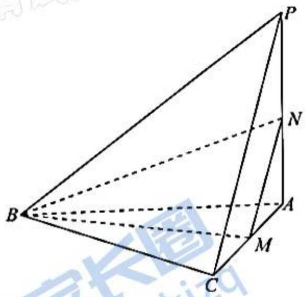
(2)求数列$\{a_n\}$的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

19.（12 分）

如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$AB=BC$，$PA\perp$平面 ABC，M，N 分别为棱 AC，AP 的中点.

(1)求证：$BM\perp PC$；

(2)若 $AB=\sqrt{5}$，$AC=2$，二面角 $A\text{-}BN\text{-}M$ 的大小为30°，求三棱锥$P\text{-}ABC$的体积.



20.（12分）

某校高一年级共有1 500名学生，其中男生900名.某次大型考试后，为了解学生某学科的考试成绩（满分为150分）是否与性别有关，按性别分层随机抽样得到一个容量为100的样本.经计算得到样本的平均值为110（单位：分），方差为100.

（1）若学生此学科的考试成绩近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用样本估计总体，试估计该校高一年级学生此学科成绩在区间[120,140]内的学生人数（最后结果按四舍五入保留整数）；

（2）若把成绩在区间[110,150]内的称为“学科优胜者”，该样本中共有“学科优胜者”58人，且男生中“学科优胜者”的频率为0.7.完成下面的2×2列联表，并根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，分析男生是“学科优胜者”的可能性是否更大.

性别	学科成绩		合计
	学科优胜者	非学科优胜者	
男			
女			
合计			

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

χ^2 独立性检验中常用小概率值和相应的临界值：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.682\ 7$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 5$，$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.997\ 3$.

21.（12分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{6},0)$，$F_2(\sqrt{6},0)$，动点 M 满足 $|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{3}$，记点 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程；

（2）圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 C 相交于 A，B 两点，P 为切点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值.

22.（12分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}+bx-a$，$a>0$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $b=-\dfrac{e}{2}$ 时，求使 $f(x)\geqslant0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立的 a 的所有值.

2022 届高三第一次学业质量联合检测·数学

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $B=\{0,1\}$，则 $A\cup B=\{0,1,2,4\}$.

2. A 【解析】$1-\frac{1}{z}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. B 【解析】由题意得 $\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，底角为 72°，则 $\cos 72^\circ=2\cos^2 36^\circ-1=2\times\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4. C 【解析】设该圆锥的底面半径为 r，母线长为 l. 由 $\alpha=\sqrt{2}\pi$，得 $\frac{2\pi r}{l}=\sqrt{2}\pi$，即 $\frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\beta\in(0,\pi)$，则 $\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{2}$.

5. B 【解析】记李明这 3 道题得分为随机变量 X，则 X 的取值为 0，5，10，15. $P(X=0)=\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{100}$，$P(X=5)=C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，$P(X=10)=C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{14}{25}$，$P(X=15)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{4}{25}$，所以 $E(X)=0\times\frac{3}{100}+5\times\frac{1}{4}+10\times\frac{14}{25}+15\times\frac{4}{25}=\frac{37}{4}$.

6. D 【解析】因为 $|\overrightarrow{BC}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|\cos B=1$，点 P 是边 AC 上的动点，所以 $|\overrightarrow{BP}|\cos\angle PBC\in[1,3]$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BP}|\cos\angle PBC\in[3,9]$.

7. A 【解析】由题意得 $\angle F_1BF_2=90^\circ$，设 $|BF_2|=x$，则 $|BF_1|=x+2a$，$|AF_2|=2x$，$|AF_1|=2x+2a$，$|AB|=3x$. 在 $Rt\triangle ABF_1$ 中，由勾股定理得 $(x+2a)^2+(3x)^2=(2x+2a)^2$，解得 $x=\frac{2}{3}a$，则 $|BF_2|=\frac{2}{3}a$，$|BF_1|=\frac{8}{3}a$. 在 $Rt\triangle F_1BF_2$ 中，由勾股定理得 $\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{8}{3}a\right)^2=(2c)^2$，化简得 $c^2=\frac{17}{9}a^2$，所以 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

8. B 【解析】由 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 1,\\ \log_2(x+3), x>1,\end{cases}$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(1)=2=\log_2(1+3)$，则函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增. 设 $g(x)=f(x)+f(x+5)$，则函数 $g(x)$ 在 R 上单调递增. 又 $g(0)=4$，所以原不等式可化为 $g(x)>g(0)$，所以 $x>0$，所以不等式 $f(x)+f(x+5)>4$ 的解集为 $(0,+\infty)$.

二、选择题

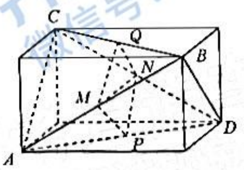
9. ACD 【解析】因为 $0<a<b$，$a+b=2$，所以 $0<a<1<b<2$，故 A 正确；因为 $a<b$，所以 $a-b<0$，所以 $2^{a-b}<1$，故 B 错误；因为 $0<a<b$，所以 $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，故 C 正确；因为 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=2(\sqrt{2}-1)$，$b=2(2-\sqrt{2})$ 时，等号成立，此时满足 $0<a<b$，$a+b=2$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确.

10. ABD 【解析】因为 $f\left(\frac{\pi}{18}\right)=2\sin 0=0$，所以 A 正确；因为 $f\left(x-\frac{\pi}{9}\right)=2\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{9}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 3x$，所以 B 正确；因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$3x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，而 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上不单调，所以 C 错误；因为 $\frac{2\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的最小正周期，所以 D 正确.

11. BD 【解析】分别记"出现的点数为偶数""出现的点数为奇数""出现的点数大于 2""出现的点数小于 4""出现的点数小于 3"为事件 E，F，M，N，H，则 $P(E)=P(F)=\frac{1}{2}$，$P(M)=\frac{2}{3}$，$P(N)=\frac{1}{2}$，$P(H)=\frac{1}{3}$，$P(EM)=\frac{1}{3}$，$P(EN)=\frac{1}{6}$，$P(EH)=\frac{1}{6}$. 因为 E，F 为对立事件，所以 E，F 不相互独立；因为 $P(EM)=\frac{1}{3}=P(E)P(M)$，所以 E，M 相互独立；因为 $P(EN)\neq P(E)P(N)$，所以 E，N 不相互独立；因为 $P(EH)=$

$\frac{1}{6}=P(E)P(H)$，所以 E，H 相互独立，所以与事件“出现的点数为偶数”相互独立的事件有“出现的点数大于 2”“出现的点数小于 3”.

12. ACD 【解析】因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 全等，M 是 AB 的中点，所以 $MC=MD$. 又因为 N 是 CD 的中点，所以 MN 垂直平分 CD，同理 MN 垂直平分 AB，故 A 正确；因为在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，$AB=CD=6$，$AC=BD=5$，$AD=BC=7$，故可将三棱锥补成如图所示的长方体，且该长方体的棱长分别为 $\sqrt{6}$，$\sqrt{19}$，$\sqrt{30}$. 因为 M，N，P，Q 分别为棱 AB，CD，AD，BC 的中点，所以 $MQ\parallel AC$，$QN\parallel BD$. 因为 AC，BD 所在侧面不是正方形，所以 AC 与 BD 不垂直，所以 MQ 与 NQ 不垂直，所以四边形 $MQNP$ 不是正方形，故 B 不正确；又长方体的体积为 $6\sqrt{95}$，所以三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的体积为 $6\sqrt{95}-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{19}\times\sqrt{30}=2\sqrt{95}$，故 C 正确；经过三棱锥各顶点的球即为三棱锥的外接球，且该三棱锥和长方体有共同的外接球，其表面积为 $(6+19+30)\pi=55\pi$，故 D 正确.



三、填空题

13. $-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $2\sin\alpha+\cos 0=0$，解得 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，经检验当 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 是奇函数.

14. 8 【解析】由题意得 $a=(1+7)^{19}=(9-1)^{19}=C_{19}^{0}9^{19}+C_{19}^{1}9^{18}(-1)+\cdots+C_{19}^{18}9^{1}(-1)^{18}+C_{19}^{19}(-1)^{19}=9k-1=9(k-1)+8$，$k\in N^{*}$，所以 a 除以 9 所得的余数为 8.

15. 3 【解析】设直线 AB 的方程为 $x=my+n(n\neq 0)$，代入抛物线方程 $y^2=2px$ 中，得 $y^2-2pmy-2pn=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-2pn$，所以 $x_1x_2=(my_1+n)(my_2+n)=m^2y_1y_2+mn(y_1+y_2)+n^2=n^2$. 由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=n^2-2pn=n(n-2p)=0$，得 $n=2p$，所以直线 AB 过定点 $(2p,0)$，所以点 O 到直线 AB 的距离的最大值为 $2p$，故 $2p=6$，所以 $p=3$.

16. 52　$n\cdot 2^{n-1}$ 【解析】由数表规律可知，第 4 行的第 1 个数为 $8+12=20$，第 n 行是公差为 2^{n-1} 的等差数列，所以第 4 行的公差 $d=2^{4-1}=8$，则第 4 行的第 5 个数为 52；记各行的第一个数组成的数列为 $\{a_n\}$，则 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n-1}$，两边同除以 2^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{4}$，故 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2}$，公差为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，则 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{n+1}{4}$，则 $a_n=\frac{n+1}{4}\times 2^n=(n+1)\times 2^{n-2}$，则 $S_n=1+3\times 2^0+4\times 2^1+\cdots+(n+1)\times 2^{n-2}$，$2S_n=2+3\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-2}+(n+1)\times 2^{n-1}$，两式相减得 $-S_n=1+2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}-(n+1)\times 2^{n-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(n+1)\times 2^{n-1}=2^{n-1}-(n+1)\times 2^{n-1}=-n\times 2^{n-1}$，所以 $S_n=n\times 2^{n-1}$.

四、解答题

17. 解：(1) 连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$.

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$.　　(2 分)

因为 $\angle ABD=\angle BDC$，

所以 $\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BCD}=\frac{BC}{AD}$.　　(3 分)

又 $BC=\sqrt{3}AD$，$\angle BAD=2\angle BCD$，

所以 $\frac{\sin 2\angle BCD}{\sin\angle BCD}=\sqrt{3}$，化简得 $\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0^\circ<\angle BCD<180^\circ$，所以 $\angle BCD=30^\circ$.　　(5 分)

(2) 因为 $\angle BAD=2\angle BCD=60^\circ$，$AB=AD=2$，

所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，且 $BD=2$，　　(7 分)

$\angle DBC=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$，且 $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，　　(8 分)

所以梯形 $ABCD$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}(2+4)\times 2\times\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$.　　(10 分)

18. 解：(1) 由 $a_{n+1}=\frac{3-(-1)^n}{2}a_n+\frac{1+(-1)^n}{2}$，

得 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, n\text{ 为奇数},\\ a_n+1, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$　　(1 分)

所以 $b_{n+1}=a_{2n+1}=a_{2n}+1=a_{2n-1+1}+1=2a_{2n-1}+1=2b_n+1$，　　(2 分)

即 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$.　　(4 分)

因为 $b_1+1=a_1+1=2\neq 0$，

所以数列 $\{b_n+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列.　　(5 分)

所以 $b_n+1=2^n$，故 $b_n=2^n-1$.　　(6 分)

(2) 由 (1) 知 $a_{2n-1}=b_n$，$a_{2n}=a_{2n-1+1}=2a_{2n-1}=2b_n$，　　(7 分)

所以 $S_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=(b_1+b_2+\cdots+b_n)+2(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=3(b_1+b_2+\cdots+b_n)$ (9分)

$=3[(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n]$

$=3\left[\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\right]$ (11分)

$=3\times2^{n+1}-3n-6$. (12分)

19. (1)证明：因为 $AB=BC$，M 是 AC 的中点，

所以 $BM\perp AC$. (1分)

因为 $PA\perp$平面 ABC，$BM\subset$平面 ABC，

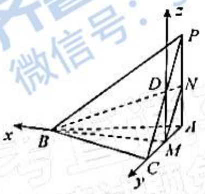
所以 $BM\perp PA$. (3分)

又 $PA\cap AC=A$，所以 $BM\perp$平面 PAC. (4分)

因为 $PC\subset$平面 PAC，所以 $BM\perp PC$. (5分)

(2)解：因为 $AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=2$，所以 $BM=2$.

取 PC 的中点 D，连接 MD，则 $MD\parallel PA$，所以 $MD\perp$平面 ABC，以 M 为坐标原点，分别以 MB，MC，MD 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $AN=t$，则 $M(0,0,0)$，$N(0,-1,t)$，$A(0,-1,0)$，$B(2,0,0)$. (6分)

所以 $\overrightarrow{MB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{MN}=(0,-1,t)$，$\overrightarrow{AN}=(0,0,t)$，$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$. (7分)

设平面 BMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x=0,\\ -y+tz=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,t,1)$. (8分)

设平面 ABN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AN}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}tz'=0,\\ 2x'+y'=0,\end{cases}$

令 $x'=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-2,0)$， (9分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-2t}{\sqrt{5}\times\sqrt{t^2+1}}$.

由二面角 A-BN-M 的大小为 $30°$，得

$\frac{2t}{\sqrt{5}\times\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $t=\sqrt{15}$， (10分)

所以 $PA=2AN=2\sqrt{15}$， (11分)

所以三棱锥 P-ABC 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2\sqrt{15}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$. (12分)

20. 解：(1)由题意，设学生此学科的考试成绩为随机变量 X，则随机变量 X 的样本均值为110，样本方差为100，用样本均值估计参数 μ，用样本方差估计参数 σ^2，可以得到 $X\sim N(110,10^2)$. (1分)

则 $P(110-10\leqslant X\leqslant110+10)=P(100\leqslant X\leqslant120)\approx0.6827$， (2分)

$P(110-3\times10\leqslant X\leqslant110+3\times10)=P(80\leqslant X\leqslant140)\approx0.9973$， (3分)

所以 $P(120\leqslant X\leqslant140)\approx\frac{0.9973-0.6827}{2}=0.1573$， (4分)

$0.1573\times1500=235.95\approx236$ 人.

由样本估计总体的思想可知，该校高一年级学生此学科考试成绩在区间[120，140]内的学生大约有236人. (5分)

(2)按照分层抽样的方法可知，该样本中男生为 $100\times\frac{900}{1500}=60$(人)，女生为40人，所以男生中“学科优胜者”的人数为 $60\times0.7=42$，女生中“学科优胜者”的人数为 $58-42=16$， (6分)

则2×2列联表为

性别	学科成绩		合计
	学科优胜者	非学科优胜者	
男	42	18	60
女	16	24	40
合计	58	42	100

(7分)

零假设为 H_0：“学科优胜者”和性别无关. (8分)

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2=\frac{100\times(42\times24-16\times18)^2}{60\times40\times58\times42}\approx8.867>7.879=x_{0.005}$ (9分)

根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为“学科优胜者”和性别有关，此推断犯错误的概率不大于0.005. (10分)

由题意知男生中“学科优胜者”和“非学科优胜者”的频率分别为0.7和0.3.

根据上表中的数据计算，女生中“学科优胜者”和“非学科优胜者”的频率分别为 $\frac{16}{40}=0.4$ 和 $\frac{24}{40}=0.6$.

由 $\frac{0.7}{0.4}=1.75$ 可见，男生中是“学科优胜者”的频率是女生中是“学科优胜者”的频率的1.75倍. 于是，根据频率稳定于概率的原理，我们可以认为男生中是“学科优胜者”的概率明显大于女生中是“学科优胜者”的概率，即认为男生是“学科优胜者”的可能性更大. (12分)

21. 解：(1)因为$|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{3}>2\sqrt{6}=|F_1F_2|$，所以点$M$的轨迹曲线$C$是以$F_1,F_2$为焦点的椭圆。 (1分)

设其方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则$2a=4\sqrt{3},a^2-b^2=6$，解得$a=2\sqrt{3},b=\sqrt{6}$。 (3分)

所以曲线C的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$。 (4分)

(2)当直线AB的斜率不存在时，$P(\pm 2,0)$，此时$|PA|=|PB|=2$，则$|PA|\cdot|PB|=4$。 (5分)

当直线AB的斜率存在时，设直线AB的方程为$y=kx+m$，

由直线AB与圆$x^2+y^2=4$相切可得$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，

化简得$m^2=4(k^2+1)$。 (6分)

联立$\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1, \end{cases}$

得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-12=0,\Delta>0$。

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2m^2-12}{2k^2+1}$。 (8分)

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=\frac{(k^2+1)(2m^2-12)}{2k^2+1}-\frac{4k^2m^2}{2k^2+1}+m^2$

$=\frac{3m^2-12(k^2+1)}{2k^2+1}$

$=\frac{12(k^2+1)-12(k^2+1)}{2k^2+1}=0$。 (10分)

所以$\angle AOB=90°$，所以$\triangle AOB$为直角三角形。

由$OP\perp AB$，可得$\triangle AOP\backsim\triangle OBP$，

所以$\frac{|PA|}{|OP|}=\frac{|OP|}{|PB|}$，

所以$|PA|\cdot|PB|=|OP|^2=4$。 (11分)

综上，$|PA|\cdot|PB|=4$。 (12分)

22. 解：(1)由题意得$f'(x)=ae^{ax}+b,a>0,x\in\mathbf{R}$.

①当$b\geqslant 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上单调递增； (1分)

②当$b<0$时，令$f'(x)>0$，解得$x>\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$，

令$f'(x)<0$，解得$x<\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$。 (3分)

所以$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right),+\infty\right)$上单调递增。 (4分)

(2)当$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$时，$f(x)=e^{ax}-\frac{\mathrm{e}}{2}x-a$，则$f'(x)=ae^{ax}-\frac{\mathrm{e}}{2}$，$f'(0)=a-\frac{\mathrm{e}}{2}$。 (5分)

①当$a\geqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$时，$f'(x)>0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，此时$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增。

因为$f(0)=1-a<0$，

所以$f(x)\geqslant 0$在区间$[0,+\infty)$上不恒成立； (6分)

②当$a\in\left(0,\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$时，令$f'(x)=0$，

解得$x=\frac{1}{a}\ln\frac{\mathrm{e}}{2a}\in(0,+\infty)$，

$f(x)$在区间$\left[0,\frac{1}{a}\ln\frac{\mathrm{e}}{2a}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{a}\ln\frac{\mathrm{e}}{2a},+\infty\right)$上单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\ln\frac{\mathrm{e}}{2a}\right)=\frac{1}{2a}(\mathrm{e}\ln 2a-2a^2)$。 (7分)

由$f(x)\geqslant 0$在区间$[0,+\infty)$上恒成立，得$f(x)_{\min}\geqslant 0$，即$\mathrm{e}\ln 2a-2a^2\geqslant 0$。 (8分)

设$g(x)=\mathrm{e}\ln 2x-2x^2$，则$g'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}-4x=\frac{\mathrm{e}-4x^2}{x}$，令$g'(x)=0$，得$x=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$，所以$g(x)$在区间$\left(0,\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2},+\infty\right)$上单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\right)=0$，

所以$g(x)\leqslant 0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，

当且仅当$x=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$时，$g(x)=0$， (10分)

所以满足不等式$\mathrm{e}\ln 2a-2a^2\geqslant 0$的$a$的值为$\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$。 (11分)

综上，使$f(x)\geqslant 0$在区间$[0,+\infty)$上恒成立的a的值为$\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$。 (12分)