



高三期中考试 数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容: 集合与常用逻辑用语, 函数与导数, 三角函数与解三角形, 平面向量, 数列。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{x-2}{x} \leq 0\}$, $B = \{x | 1-x > 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | 1 < x < 2\}$ B. $\{x | 0 < x < 1\}$
 C. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ D. $\{x | 0 \leq x < 1\}$
2. 已知命题, $\exists x \in \mathbb{R}, \tan 2x = 4$, 则
 A. 该命题为假命题, 其否定是 $\forall x \in \mathbb{R}, \tan 2x \neq 4$
 B. 该命题为假命题, 其否定是 $\exists x \in \mathbb{R}, \tan 2x \neq 4$
 C. 该命题为真命题, 其否定是 $\forall x \in \mathbb{R}, \tan 2x \neq 4$
 D. 该命题为真命题, 其否定是 $\exists x \in \mathbb{R}, \tan 2x \neq 4$
3. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) =$
 A. $\frac{5}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$ C. $\frac{2\sqrt{14}}{9}$ D. $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$
4. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_2 + a_{10} = 10$, 则 $S_{11} =$
 A. 22 B. 45 C. 50 D. 55
5. 设 $a = \log_{0.99} 0.98$, $b = \pi^{-\frac{1}{3}}$, $c = \cos 91^\circ$, 则
 A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则 " $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$ " 是 " $\triangle ABC$ 为等腰三角形" 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 已知函数 $f(x) = x(|x| + 1)$, 若 $f(a-2) + f(a^2-2a) < 0$, 则 a 的取值范围为
 A. $(-2, 1)$ B. $(-1, 2)$
 C. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

8. 已知 $ABCD$ 是半径为 $\sqrt{2}$ 的圆 O 的内接正方形, P 是圆 O 上的任意一点, 则 $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PD}^2$ 的值为

A. 8

B. 16

C. 32

D. 与 P 的位置有关

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知向量 $a = (1, -1)$, $b = (m, 1-m)$, $c = (2m, 2)$, 若 $a \perp b$, 则

A. $m = -\frac{1}{2}$

B. $a \cdot b = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

C. $|c| = \sqrt{5}$

D. $b \cdot c = \frac{3}{2}$

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^{n+1} + m$ ($m \in \mathbb{R}$), 则

A. $m = -1$

B. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2

C. $a_n = 2^n$

D. $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2 = \frac{4^{11} - 1}{3}$

11. 三个函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, $g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{5})$, $h(x) = \sin x$ 在同一平面直角坐标系中的

部分图象如图所示, 则

A. a 为 $f(x)$

B. b 为 $f(x)$

C. a 为 $g(x)$

D. b 为 $g(x)$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$, 则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减

C. 若函数 $y = f(x) - \ln x + x^2$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值, 则 $x_0 \in (0, 1)$

D. $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) > \ln x - x^2 + 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 已知 a 为函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 3x$ 的极小值点, 则 $a =$ ▲.

14. 某阅读平台为了吸引用户, 决定对部分图书开展限时免费阅读活动. 当提供免费阅读的图书为 a 本时, 其用户人数 $f(a) = 80[\frac{a}{3}] + 32([a])$ 表示不大于 a 的最大整数. 当 $a = 100$ 时, 用户人数为 ▲; 若该平台想通过本次活动使用户人数不少于 5000, 则至少需要提供免费阅读的图书数量为 ▲. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

15. 悬链线是平面曲线, 是柔性链条或绳索两端固定在两根支柱顶部, 中间自然下垂所形成的外形. 在工程中(如悬索桥、双曲拱桥、架空电缆)有广泛的应用. 当微积分尚未出现时, 伽利略猜测这种形状是抛物线, 直到 1691 年莱布尼兹和伯努利利用微积分推导出悬链线的方程 $y = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} \pm e^{-\frac{x}{c}})$, 其中 c 为参数. 当 $c = 1$ 时, 我们可构造出双曲函数(双曲正弦函数 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$), 则函数 $y = \cosh(2x) + \sinh(x)$ 的最小值为 ▲.

【高三数学 第 2 页(共 4 页)】

• 22-10-139C2 •

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -\frac{1}{9}$, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $n(n+1)(a_{n+1} - a_n) + 11a_{n+1} = 0$.

0, 则当 S_n 取得最小值时, $n = \underline{\quad\quad}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x + m$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 处的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点坐标.

18. (12 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = \sqrt{2}$, BC 边的中垂线交 BC 于 D , 交 AB 于 E , 且 $BE = 2AE$.

(1) 求 $\sin B$ 的值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

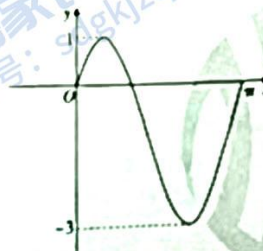


19. (12 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及其图象对称中心的坐标;

(2) 设 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $f(\frac{\alpha}{2}) = -\frac{5}{3}$, 求 $\cos \alpha$.



20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{2n+a_n}$.

(1) 证明数列 $\left\{\frac{n}{a_n} + 1\right\}$ 是等比数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知正项等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $b_1 = b_2, S_2 = \frac{3}{4}$. 若 $c_n = a_n S_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x$.

(1) 若 $y = f(x-a)$ 在 $(1, 5)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 已知 $a > 0$, 若 $y = |f(x)|$ 在区间 $(0, 4)$ 内的图象上存在两点, 使得在这两点处的切线相互垂直, 求 a 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x e^{x^2} - x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 零点的个数;

(2) 设 m, n 为两个不相等的正数, 且 $e^{m^2} - m = e^{n^2} - n = 0$, 证明: $mn < 1$.

高三期中考试 数学参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.

因为 $A = \{x | 0 < x \leq 2\}$, $B = \{x | x < 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$.

2. C 【解析】本题考查命题,考查逻辑推理的核心素养.

因为函数 $y = \tan 2x$ 的值域为全体实数, 所以 $\exists x \in \mathbf{R}$, $\tan 2x = 1$, 故该命题是真命题, 其否定是 $\forall x \in \mathbf{R}$, $\tan 2x \neq 1$.

3. A 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

将 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ 两边平方可得 $1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9}$, 则 $\sin 2\alpha = -\frac{5}{9}$, $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin 2\alpha = \frac{5}{9}$.

4. A 【解析】本题考查计数原理,考查逻辑推理的核心素养.

从 8 个点中任取 3 个点, 共有 $C_8^3 = 56$ 种情况, 这 3 个点恰好位于同一个奥林匹克环上有 $3 \times C_3^1 = 12$ 种情况.

则所求的概率 $P = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$.

5. B 【解析】本题考查指数、对数的大小,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a = \log_{0.99} 0.98 > \log_{0.99} 0.99 = 1$, 所以 $a > 1$. 因为 $b = \pi^{-\frac{1}{3}} < \pi^0 = 1$, 所以 $0 < b < 1$.

又 $c = \cos 91^\circ < 0$, 所以 $a > b > c$.

6. A 【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$, 所以由正弦定理可知 $\sin A = \cos A$, $\sin B = \cos B$, 则 $A = B = \frac{\pi}{4}$, 此时 $\triangle ABC$ 为

等腰直角三角形. 当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时, $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$ 不一定成立. 所以“ $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$ ”是“ $\triangle ABC$ 为等腰三角形”的充分不必要条件.

7. B 【解析】本题考查函数的单调性,考查数形结合的数学思想.

因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数. 又因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^3 + x$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(a-2) + f(a^2-2a) < 0$, 所以 $f(a^2-2a) < -f(a-2)$, 则 $f(a^2-2a) < f(2-a)$, 即 $a^2-2a < 2-a$, 解得 $-1 < a < 2$, 所以 a 的取值范围为 $(-1, 2)$.

8. B 【解析】本题考查平面向量的运算,考查化归与转化的数学思想.

$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PD}^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD})^2 = 4\overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 8 \times (\sqrt{2})^2 = 16$.

9. BCD 【解析】本题考查平面向量的运算,考查运算求解能力.

由 $a \perp b$, 得 $m-1+m=0$, 则 $m = -\frac{1}{2}$, $b = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $c = (1, 2)$, 所以 $a \cdot b = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$, $|c| = \sqrt{5}$, $b \cdot c = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (1, 2) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

10. BCD 【解析】本题考查统计,考查数据分析的核心素养.

经计算, 甲的总环数大于乙的总环数, 因此甲为中国选手, 乙为韩国选手, 故 A 正确. 甲射击成绩的众数是 9, 乙射击成绩的众数是 10, 故 B 错误. 经计算, 甲射击成绩的极差大于乙射击成绩的极差, 故 C 错误. 甲射击成绩的中位数等于乙射击成绩的中位数, 故 D 错误.

11. BC 【解析】本题考查三角函数的图象,考查数学抽象以及逻辑推理的核心素养.

$f(x), g(x), h(x)$ 的最小正周期分别为 $\pi, \pi, 2\pi$, 易知 c 为 $h(x)$. 当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $h(x) = \sin x$ 取得最大值; 当 $x = \frac{7\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 取得最小值; 当 $x = \frac{2\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{5})$ 取得最小值. 结合图象可知, a 为 $g(x), b$ 为 $f(x)$, 故选 BC.

12. ACD 【解析】本题考查导数的应用, 考查逻辑推理的核心素养.

$f'(x) = e^x - 2x$, 令 $g(x) = f'(x) = e^x - 2x$, 则 $g'(x) = e^x - 2$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

令 $g(x) = f(x) - \ln x + x^2 = e^x - \ln x$, 则 $g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x}$. 令 $h(x) = xe^x - 1$, 则 $h'(x) = (x+1)e^x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $h(0) \cdot h(1) = -(e-1) < 0$, 所以 $\exists x_0 \in (0, 1), h(x_0) = 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0$. 又 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, x_0 = -\ln x_0$, 所以 $g(x)_{\min} = \frac{1}{x_0} + x_0 > 2$, 故选 ACD.

13. 16 【解析】本题考查基本不等式, 考查运算求解能力.

由 $3x + y = xy$, 可得 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1$, 所以 $x + 3y = (x + 3y)(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}) = 1 + \frac{3y}{x} + \frac{3x}{y} + 9 \geq 6 + 10 = 16$ (当且仅当 $\frac{3y}{x} = \frac{3x}{y}$, 即 $x = 4, y = 4$ 时, 等号成立).

14. 4 【解析】本题考查复数的四则运算, 考查逻辑推理的核心素养.

$|z_1 + 2i| \leq |z_1| + |2i| = 2 + 2 = 4$.

15. $\frac{7}{8}$ 【解析】本题考查函数的最值, 考查运算求解能力.

$y = \cos h(2x) + \sin h(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x}) + 2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}{2} \geq \frac{7}{8}$.
所以函数 $y = \cos h(2x) + \sin h(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$.

16. 12 【解析】本题考查基本不等式的应用, 考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a^2 + 2b^2 \geq 2\sqrt{2}ab, b^2 + c^2 \geq 2bc$, 所以 $a^2 + 3b^2 + c^2 + \frac{9\sqrt{2}ac}{\sqrt{2}a+c}$
 $= a^2 + 3b^2 + c^2 + \frac{18}{\sqrt{2}ab+bc} \geq 2\sqrt{2}ab + 2bc + \frac{18}{\sqrt{2}ab+bc} \geq 2\sqrt{2(\sqrt{2}ab+bc)} \cdot \frac{18}{\sqrt{2}ab+bc} = 12$, 当且仅当
 $\begin{cases} a = \sqrt{2}b, \\ b = c, \\ 2\sqrt{2}ab + 2bc = \frac{18}{\sqrt{2}ab+bc}, \\ abc = \sqrt{2}, \end{cases}$ 即 $a = \sqrt{2}, b = c = 1$ 时, 等号成立.

17. 解: (1) 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 则 $m = 0$ 2 分

设 $x \in (0, +\infty)$, 则 $-x \in (-\infty, 0)$, 所以 $f(x) = -f(-x) = -(x^2 + 2x) = x^2 - 2x$ 4 分

所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 0, \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0. \end{cases}$ 5 分

(2) 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = -2x - 2$, 则 $f'(-2) = 2$ 6 分

又 $f(-2) = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 处的切线方程为 $y - 0 = 2(x + 2)$, 即 $y = 2x + 4$ 7 分

【高三数学·参考答案 第 2 页(共 4 页)】

• 22 10 139C1 •

当 $x \leq 0$ 时, 切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点坐标为 $(-2, 0)$; 8 分

当 $x > 0$ 时, 联立方程 $\begin{cases} y = 2x + 4, \\ y = x^2 - 2x, \end{cases}$ 解得 $x = 2\sqrt{2} + 2, y = 4\sqrt{2} + 8$, 即公共点的坐标为 $(2\sqrt{2} + 2, 4\sqrt{2} + 8)$.
..... 9 分

综上, 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 处的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点坐标为 $(-2, 0)$ 和 $(2\sqrt{2} + 2, 4\sqrt{2} + 8)$.
..... 10 分

18. 解: (1) 如图, 连接 CE , 则 $CE = EB = 2$, 1 分

在 $\triangle ACE$ 中, $\cos \angle CEA = \frac{CE^2 + AE^2 - AC^2}{2CE \cdot AE} = \frac{1 + 4 - 2}{2 \times 1 \times 2} = \frac{3}{4}$ 3 分

因为 $\angle CEA = 2\angle B$, 所以 $\cos \angle CEA = 1 - 2\sin^2 B = \frac{3}{4}$, 5 分

解得 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 6 分

(2) 由 (1) 可知 $\sin \angle CEA = \sqrt{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 8 分

则 $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 10 分

因为 $BE = 2AE$, 所以 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ACE} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$ 12 分

19. 解: (1) 由图可知 $\begin{cases} A + B = 1, \\ -A + B = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A = 2, \\ B = -1. \end{cases}$ 1 分

$T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 则 $\omega = 2$ 2 分

又 $f(0) = 2\sin \varphi - 1 = 0, 0 < \varphi < \pi$, 且函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近单调递增, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 3 分

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 1$ 4 分

由 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,
..... 5 分

所以函数 $f(x)$ 图象对称中心的坐标为 $(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, -1) (k \in \mathbb{Z})$ 6 分

(2) 由 $f(\frac{\alpha}{2}) = -\frac{5}{3}$, 可得 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{3}$ 7 分

因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, 又 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) < 0$, 所以 $\alpha + \frac{\pi}{6} \in (\pi, \frac{7\pi}{6})$ 8 分

所以 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 9 分

$\cos \alpha = \cos[(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] = \cos(\alpha + \frac{\pi}{6})\cos \frac{\pi}{6} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{6} + 1}{6}$ 12 分

20. 解: (1) 设事件 A_1, A_2 分别表示依方案甲需要化验 2 次, 3 次, 事件 B_1, B_2 分别表示依方案乙需化验 2 次, 3 次, 事件 A 表示甲组化验次数多于乙组化验次数.
依题意, 显然 A_2 与 B_1 独立, 则 $A = A_2 B_1$ 1 分

$P(\overline{A_2}) = P(A_1) = \frac{C_3^1}{C_5^1} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{1}{C_3^1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}, P(B_1) = \frac{C_2^1}{C_5^1} + \frac{C_3^1 \times 1}{C_5^1 \times C_3^1} = \frac{3}{5}$ 3 分

$P(A) = P(A_2 B_1) = P(A_2) \cdot P(B_1) = [1 - P(\overline{A_2})] \cdot P(B_1) = (1 - \frac{3}{5}) \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

故甲组化验次数多于乙组化验次数的概率为 $\frac{6}{25}$ 6 分

(2) X 的可能取值为 2, 3. 7 分

$P(X=2) = \frac{C_4^1 + C_4^2}{C_5^2} \times \frac{1}{C_3^1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, $P(X=3) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ 9 分

X 的分布列为

X	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

..... 10 分

$E(X) = 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ 12 分

21. 解: (1) $y = f(x-a) = a \ln(x-a)$, 因为 $y = f(x-a)$ 在 $(1, 5)$ 上单调递增, 所以 $a > 0$ 2 分

又因为 $x-a > 0$ 在 $(1, 5)$ 上恒成立, 所以 $1-a \geq 0$, 解得 $a \leq 1$ 4 分

所以 a 的取值范围为 $(0, 1]$ 5 分

(2) $y = |f(x)| = \begin{cases} a \ln x, & 1 \leq x < 4, \\ -a \ln x, & 0 < x < 1. \end{cases}$

由题可知, 存在 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 4$, 使得 $-\frac{a}{x_1} \cdot \frac{a}{x_2} = -1$, 7 分

所以 $-\frac{a^2}{x_1 x_2} = -1$, 即 $a^2 = x_1 x_2$, 9 分

则 $0 < a^2 < 4$ 11 分

因为 $a > 0$, 所以 $0 < a < 2$, 则 a 的取值范围为 $(0, 2)$ 12 分

22. (1) 解: 已知 $f(x) = x(e^{x-a} - x)$, 令 $f(x) = 0$, 则 $x = 0$ 或 $e^{x-a} - x = 0$ 2 分

因为 $e^{x-a} - x = 0$, 所以 $x - \ln x = a$. 设 $h(x) = x - \ln x (x > 0)$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

令 $h'(x) > 0$, 则 $x > 1$; 令 $h'(x) < 0$, 则 $0 < x < 1$.

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = 1$ 3 分

综上, 当 $a < 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点; 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 恰有两个零点; 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点. 5 分

(2) 证明: 因为 $e^{m-a} - m = e^{n-a} - n = 0$, 所以 m, n 为 $f(x)$ 两个不同的零点, 不妨设 $0 < m < 1 < n$, 则 $h(m) = h(n) = a$ 7 分

令 $\varphi(x) = h(x) - h(\frac{1}{x}) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x (0 < x < 1)$,

则 $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$ 对任意的 $x \in (0, 1)$ 恒成立.

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以 $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$.

即当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < h(\frac{1}{x})$ 9 分

又 $0 < m < 1$, 所以 $h(m) = h(n) < h(\frac{1}{m})$ 11 分

因为 $n > 1$, $\frac{1}{m} > 1$, 且 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $n < \frac{1}{m}$, 故 $mn < 1$, 得证. 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索