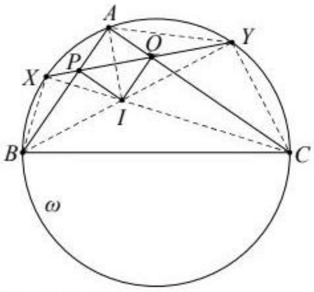
2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 全国高中数学联合竞赛
加试（B 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一. （本题满分 40 分） 如图所示，I 是 ΔABC 的内心，点 P, Q 分别为 I 在边 AB, AC 上的投影．直线 PQ 与 ΔABC 的外接圆相交于点 X, Y（P 在 X, Q 之间）．已知 B, I, P, X 四点共圆，证明：C, I, Q, Y 四点共圆．



证明： 记 ΔABC 的外接圆为 ω．

因为 $\angle API = \angle AQI = 90^\circ$，故 A, P, I, Q 四点共圆．因此

$$\angle BPQ = \angle BPI + \angle IPQ = 90^\circ + \angle IAQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BIC.$$

又由 B, I, P, X 四点共圆可知 $\angle BPX = \angle BIX$，故

$$\angle BIX + \angle BIC = \angle BPX + \angle BPQ = 180^\circ,$$

因此 C, I, X 三点共线． ……………10 分

由 B, I, P, X 共圆可知 $\angle BXI = \angle BPI = 90^\circ$，故 $BX \perp IX$，即 $BX \perp CX$．因此 $\angle BAC = \angle BXC = 90^\circ$．

于是四边形 $APIQ$ 是正方形，PQ 垂直平分线段 AI． ……………20 分

设 Y' 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，则由内心熟知的结论可知 $Y'A = Y'I$，因此 Y' 是 AI 的中垂线 PQ 与圆 ω 的交点．又直线 PQ 与圆 ω 相交于 X, Y 两点，且 Y' 显然不同于 X，故 Y' 与 Y 重合．因此 Y 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点． ……………30 分

于是 B, I, Y 三点共线．因此 $\angle IYC = \angle BYC = \angle BAC = 90^\circ = \angle IQC$，进而 C, I, Q, Y 四点共圆． ……………40 分

二. （本题满分 40 分） 求最大的正整数 n，使得存在 8 个整数 x_1, x_2, x_3, x_4 和 y_1, y_2, y_3, y_4，满足：

$$\{0, 1, \cdots, n\} \subseteq \left\{|x_i - x_j| \,\middle|\, 1 \le i < j \le 4\right\} \cup \left\{|y_i - y_j| \,\middle|\, 1 \le i < j \le 4\right\}.$$

解： 设 n 符合要求，则整数 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ 满足：$0, 1, \cdots, n$ 都属于集合 $X \cup Y$，其中 $X = \left\{|x_i - x_j| \,\middle|\, 1 \le i < j \le 4\right\}$, $Y = \left\{|y_i - y_j| \,\middle|\, 1 \le i < j \le 4\right\}$.

注意到$0\in X\cup Y$，不妨设$0\in X$，则x_1,x_2,x_3,x_4中必有两个数相等，不妨设$x_1=x_2$．于是$X=\{0\}\cup\left\{|x_i-x_j|\,\middle|\,2\le i<j\le 4\right\}$，所以$|X|\le 1+3=4$．

又$|Y|\le C_4^2=6$，故$n+1\le|X\cup Y|\le|X|+|Y|\le 10$，得$n\le 9$．

……………20 分

另一方面，令$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,7,8)$，$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(0,4,6,9)$，则

$$X=\{0,1,7,8\},\ Y=\{2,3,4,5,6,9\},$$

即$0,1,\cdots,9$都属于集合$X\cup Y$．

综上，n的最大值为9．……………40 分

三．（本题满分 50 分）已知$a,b,c,d\in[0,\sqrt[4]{2})$，满足：$a^3+b^3+c^3+d^3=2$，求$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}+\frac{b}{\sqrt{2-b^4}}+\frac{c}{\sqrt{2-c^4}}+\frac{d}{\sqrt{2-d^4}}$的最小值．

解：当$a>0$时，有$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}=\frac{a^3}{\sqrt{a^4(2-a^4)}}\ge a^3$．

当$a=0$时，$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}\ge a^3$也成立．……………30 分

所以

$$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}+\frac{b}{\sqrt{2-b^4}}+\frac{c}{\sqrt{2-c^4}}+\frac{d}{\sqrt{2-d^4}}\ge a^3+b^3+c^3+d^3=2,$$

……………40 分

当$a=b=1,c=d=0$时上述不等式等号成立．

故$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}+\frac{b}{\sqrt{2-b^4}}+\frac{c}{\sqrt{2-c^4}}+\frac{d}{\sqrt{2-d^4}}$的最小值为$2$．……………50 分

四．（本题满分 50 分）设a为正整数．数列$\{a_n\}$满足：

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a_n^2+20,\quad n=1,2,\cdots.$$

(1) 证明：存在一个非立方数的正整数a，使得数列$\{a_n\}$中有一项为立方数．

(2) 证明：数列$\{a_n\}$中至多有一项为立方数．

解：(1) 注意到$14^2+20=216=6^3$，故取$a=14$，则$a_2=a^2+20=6^3$为立方数，从而$a=14$满足条件．……………10 分

(2) 不妨设$\{a_n\}$中存在立方数，a_k是所出现的第一个立方数．

因为对任意整数m，有$m\equiv 0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\pmod 9$，由此知$m^3\equiv 0,\pm1\pmod 9$，所以$a_k\equiv 0,\pm1\pmod 9$．……………30 分

于是

$$a_{k+1}=a_k^2+20\equiv 2,3\pmod 9,$$
$$a_{k+2}=a_{k+1}^2+20\equiv 6,2\pmod 9,$$
$$a_{k+3}=a_{k+2}^2+20\equiv 2,6\pmod 9,$$

以此类推知$a_{k+i}\equiv 2,6\pmod 9$, $i=4,5,\cdots$．于是a_k后面的项模9不为$0,\pm1$，故都不是立方数．

因此，数列$\{a_n\}$中至多有一项为立方数．……………50 分